Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2026

Hausaufgabenversion

Aufgaben

Allgemeine Hinweise:
Als Hilfsmittel dürfen Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Wissenschaftliche Taschenrechner und eine Formelsammlung sind ebenfalls zugelassen.

Aufgabe 1: (Bi-)Quadratische Gleichungen

Berechnen Sie die Lösungsmenge.

a) $x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 1 = 0$

b) $(\cos x)^2 + \frac{3}{2}\cos x = 1;\ x \in [0,2\pi]$

c) $(\sin(2x+1))^2 + \frac{3}{2}\sin(2x+1) = 1;\ x \in [0,\pi]$

Aufgabe 2: Summe der Kubikzahlen

Die Summe der ersten n Kubikzahlen $s_n := 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$ lässt sich durch die Formel

$$s_n = \left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4} = \tfrac{1}{4}\cdot n^4 + \tfrac{1}{2}\cdot n^3 + \tfrac{1}{4}\cdot n^2$$

beschreiben.

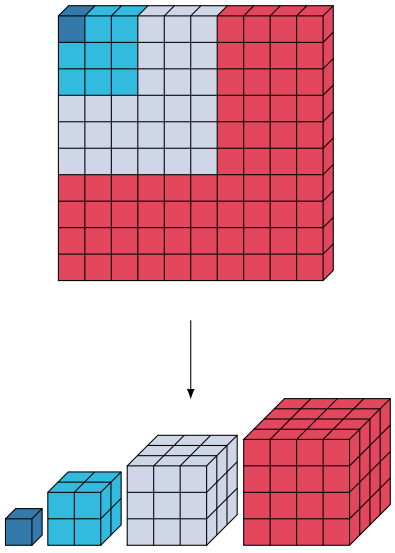
a) Berechnen Sie s_1, s_2 und s_3 und zeigen Sie, dass die Formel für die ersten drei Summen korrekt ist.

b) Die Abbildung zeigt eine Veranschaulichung der Formel für die Summe der ersten Kubikzahlen.

   i) Zeigen Sie, dass die Anzahl der gleich gefärbten kleinen Würfel immer einer Kubikzahl entspricht.

   ii) Erklären Sie die Formel anhand der Abbildung.

c) Beweisen Sie die Formel für die Summe der ersten n Kubikzahlen mit Hilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion.



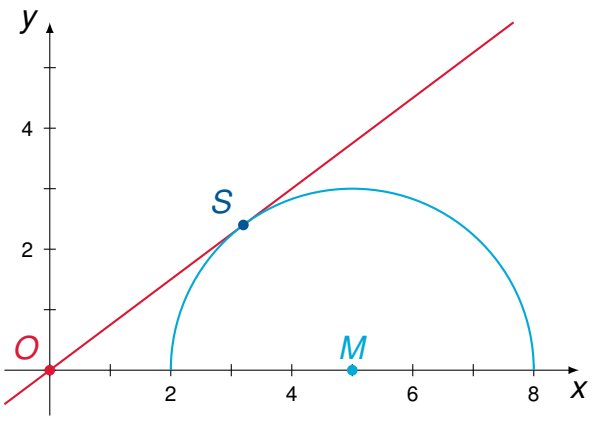
$(1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$

Aufgabe 3: Halbkreis und Gerade

In einem Koordinatensystem befindet sich oberhalb der 1. Achse ein Halbkreis um den Punkt $M = (5\,|\,0)$ mit Radius $r = 3$. Seine Gleichung ist

$$y = \sqrt{9 - (x-5)^2}.$$

Dieser Kreis wird von einer Ursprungsgerade im Punkt S berührt.



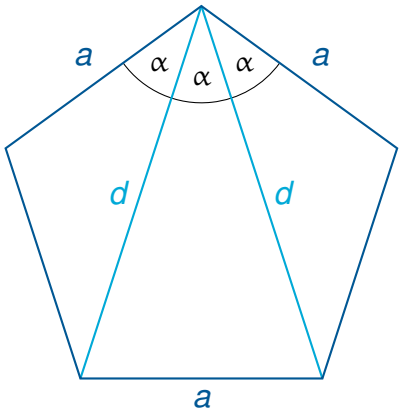
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OMS.

b) Berechnen Sie die Höhe h des Dreiecks OMS zur Grundseite OM.

c) Berechnen Sie die Gleichung der Ursprungsgerade.

d) Berechnen Sie die Steigung an jedem beliebigen Punkt $(x_0\,|\,y_0)$ des Halbkreises um M und untersuchen Sie, wie sich die Steigung verhält, wenn sich x_0 (von rechts) dem Wert 2 annähert.

Aufgabe 4: Goldener Schnitt



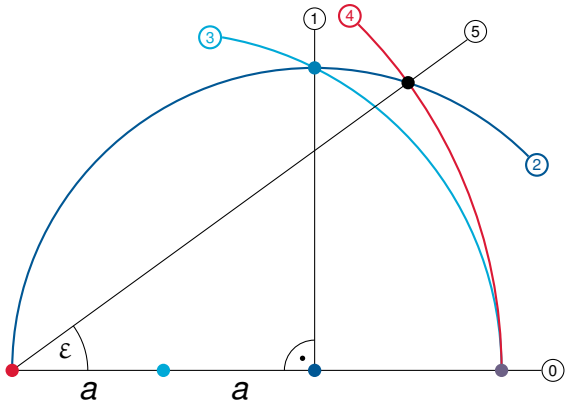
Der Goldene Schnitt τ entspricht dem Verhältnis $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Er entspricht dem Seitenverhältnis der Länge der Diagonalen *d* zur Seitenlänge *a* im regelmäßigen Fünfeck. Errichtet man ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkeln der Länge *a* und einer Basis der Länge *d*, so beträgt der Basiswinkel $\alpha = 36°$.

a) Erklären Sie, warum der Winkel α gerade $36°$ beträgt.

b) Zeigen Sie, dass im regelmäßigen Fünfeck das Verhältnis von Diagonale zu Seitenlänge dem Goldenen Schnitt τ entspricht.

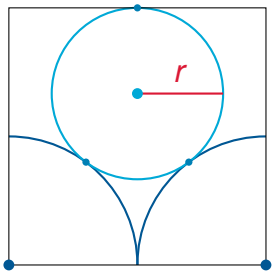
c) Zeigen Sie, dass in der Figur der Winkel ε ebenfalls $36°$ beträgt.



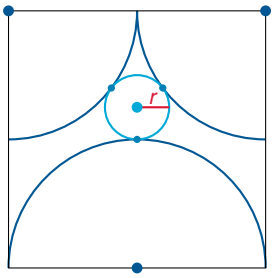
Aufgabe 5: Pythagoras im Quadrat

Das Quadrat hat jeweils Seitenlänge a. Berechnen Sie die Größen r, x und y.

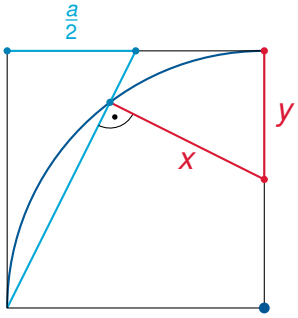
a)



b)



c)



Hinweis zu c): Fügen Sie ein weiteres Quadrat rechts an und ergänzen Sie die Skizze.

Aufgabe 6: Gewinnwahrscheinlichkeit bei Würfeln (nach Huygens)

Die Spieler A und B würfeln abwechselnd mit zwei idealen Würfeln gleichzeitig. Spieler A beginnt. Er gewinnt, wenn A die Augensumme 6 erzielt, B gewinnt dagegen, wenn B die Augensumme 7 würfelt. Das Spiel endet, wenn einer der beiden Spieler gewonnen hat.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln die Augensumme 6 bzw. 7 zu erzielen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A in der vierten Runde gewinnt bzw. dass B in der vierten Runde gewinnt.

c) Berechnen Sie die Gesamtgewinnwahrscheinlichkeit von A.

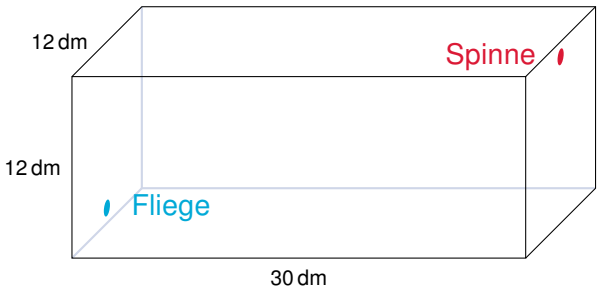
Hinweis: Nutzen Sie hierzu den folgenden Zusammenhang (sog. geometrische Reihe):

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

d) Um die Gewinnwahrscheinlichkeit von A zu verbessern, darf A ausnahmsweise beim ersten Wurf mit nur einem Würfel würfeln. Er gewinnt, wenn er die Augenzahl 6 erzielt. Dann geht das Spiel wie bisher weiter. Berechnen Sie nun die Gewinnwahrscheinlichkeit von A.

Aufgabe 7: Spinne - Fliege - Honig

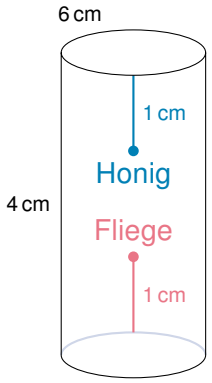
a) Ein Quader hat eine quadratische Grundfläche der Kantenlänge 12 dm. Er ist 30 dm lang. In der Mitte der linken quadratischen Grundfläche, 1 dm über dem Boden, sitzt eine Fliege. Gegenüber sitzt, ebenfalls in der Mitte auf der quadratischen Grundfläche, aber 1 dm unter der Oberseite, eine Spinne.



Wie groß ist die kürzeste Strecke von der Spinne zur Fliege, die über die Quaderfläche führt?

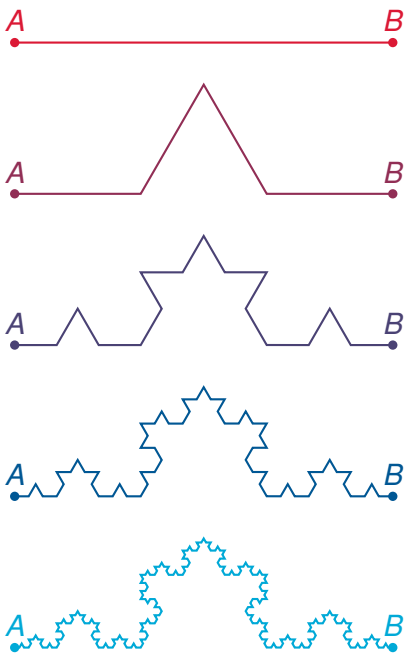
b) Ein oben offenes zylindrisches Gefäß ist 4 cm hoch und hat einen Umfang von 6 cm. 1 cm über dem Boden auf der Innenseite befindet sich eine Fliege. Auf der Außenseite genau gegenüber, 1 cm unter der Oberseite, ist ein Tropfen Honig.

Berechnen Sie den kürzesten Weg, den die Fliege auf der Zylinderfläche zum Honigtropfen zurücklegen muss.



Aufgabe 8: Von-Koch-Kurve

Ausgehend von einer Strecke $\overline{AB}$, welche der Einfachheit wegen die Länge $l_0 = 1$ habe, erzeugt man neue Streckenzüge, indem man über dem mittleren Streckendrittel ein gleichseitiges Dreieck errichtet und dann dieses Drittel wegnimmt. Beim nächsten Schritt wird dieses Verfahren auf die vier Teilstrecken angewandt.



a) Berechnen Sie die jeweilige Länge s_n der einzelnen Teilstrecken der nach 3, 4 und 5 Schritten entstandenen Figur ($n \in \{3,4,5\}$).

b) Berechnen Sie die Länge l_n des gesamten Streckenzuges nach 3, 4 und 5 Schritten ($n \in \{3,4,5\}$). Wie verhält sich die Gesamtlänge l_n, wenn man den Prozess immer weiter fortsetzt?

c) Nun betrachten wir den Inhalt der Fläche A_n, der über der Strecke $\overline{AB}$ durch l_n eingeschlossen wird. Berechnen Sie A_1, A_2 und A_3. Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn man den Prozess immer weiter fortsetzt?

Hinweis für b) und c): Nutzen Sie hierzu den folgenden Zusammenhang (sog. geometrische Reihe):

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$