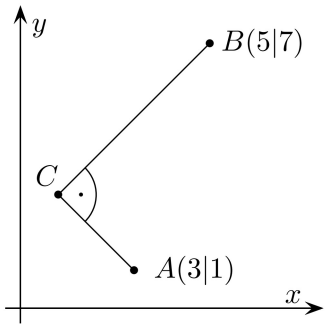
MW-E
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.
Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(3|1)$, $B(5|7)$ und $C(1|y)$.

   Berechnen Sie die $y-$Koordinate des Punktes C so, dass $\angle ACB = 90°$ gilt.



---

2. Wählen Sie eine 3−stellige Zahl.
   Vertauschen Sie die Einer- und die Hunderterziffer.
   Bilden Sie die Differenz aus der größeren und der kleineren Zahl.
   Beispiel: 266 und 662: $662 - 266 = 396$

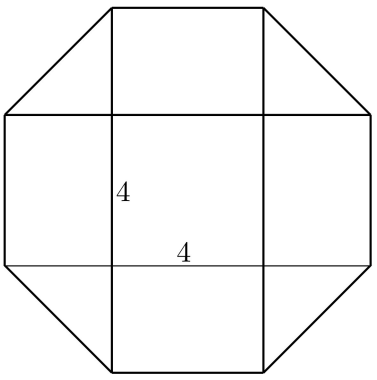
   a) Wiederholen Sie dieses Schema an 3 weiteren Beispielen.

   b) Bestimmen Sie den ggT dieser Differenzen.

   c) Beweisen Sie für beliebige dreistellige Zahlen abc mit $a \geq c$, dass alle nach diesem Schema gebildeten Differenzen diesen ggT haben.

---

3. a) Das Quadrat in der nebenstehenden Abbildung hat die Seitenlänge 4.
   Bestimmen Sie die Fläche des regelmäßigen Achtecks.



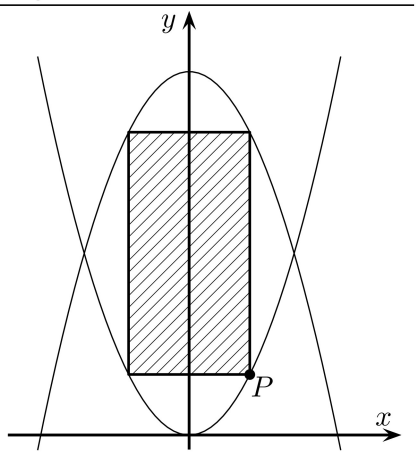
   b) Die Seiten eines Dreiecks haben die Längen 5, 12 und n, wobei n eine natürliche Zahl ist.

      i) Bestimmen Sie, wie viele solcher Dreiecke es gibt. Ermitteln Sie dazu, für welche n die Dreiecksungleichungen erfüllt sind.

      ii) Untersuchen Sie, für welches n das Dreieck den maximalen Flächeninhalt hat.

      iii) Bestimmen Sie, für welche n die Dreiecke stumpfwinklig sind.

4. Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schaubild der Parabel $p_1(x) = x^2$ und $p_2(x) = 6 - x^2$
Die beiden Schaubilder begrenzen ein Gebiet, dem ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen, einbeschrieben ist.

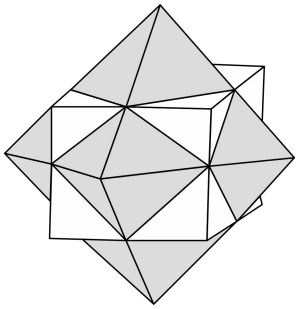


Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P auf p_1 im 1. Quadranten so, dass das Rechteck eine möglichst große Fläche hat, und berechnen Sie diese.

Bemerkung: Zur Berechnung des Maximums ohne Differenzialrechnung kann die Umformung
$$3b^2x - a^2x^3 = \frac{2b^3}{a} - \left(x - \frac{b}{a}\right)^2 \cdot (a^2x + 2ab)$$ hilfreich sein.

---

5. Ein Würfel mit Kantenlänge a und ein Oktaeder durchdringen sich so, dass die Kantenmitten jeweils zusammenfallen (siehe Abbildung).



a) Bestimmen Sie die Kantenlänge s des Oktaeders in Abhängigkeit der Kantenlänge a des Würfels.

b) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Oktaeders.

c) Bestimmen Sie den Inhalt der Oberfläche des Durchdringungskörpers.

---

6. a) Bestimmen Sie die Anzahl aller 5−stelligen Zahlen, die die Ziffern 0; 2; 7; 8; 9 genau 1 Mal enthalten.

b) Geben Sie mindestens 2 Zahlen aus a) an, die durch 11 teilbar sind.

c) Bestimmen Sie die Anzahl aller 5−stelligen Zahlen, die die Ziffer 7 mindestens 1−mal enthalten.

Hinweis: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn der Betrag ihrer *alternierenden Quersumme* durch 11 teilbar ist.
Die alternierende Quersumme einer Zahl erhält man, indem man die Ziffern der Zahl, beginnend mit der Einerziffer, abwechselnd subtrahiert und addiert.

Beispiel für die alternierende Quersumme der Zahl 909183:
$3 - 8 + 1 - 9 + 0 - 9 = -22$ $\quad 22 : 11 = 2$, also ist 909183 durch 11 teilbar.

7. a) Berechnen Sie für welchen Wert des Parameters c die Parabel $p(x) = x^2 - 8x + c$ die $x-$Achse berührt.

b) Die Parabel p mit der Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$ hat eine negative und eine positive Nullstelle.
Ihr Scheitelpunkt liegt bei $S\,(4|-5)$

Untersuchen Sie, welche der Parameter a, b, c positiv und welche negativ sind.

c) Eine Gärtnerei bietet für ihre Rosenstöcke einen Mengenrabatt in Form eines so genannten Staffelpreises $P(n)$ ($n:$ Anzahl an gekauften Rosenstöcken, $P(n):$ Gesamtpreis der Rosenstöcke in Euro) an.

Dieser ist wie folgt definiert: $P(n) = \begin{cases} 12 \cdot n & \text{für } 1 \leq n \leq 24 \\ 11 \cdot n & \text{für } 25 \leq n \leq 49 \\ 10 \cdot n & \text{für } 50 \leq n \end{cases}$

i) Zeigen Sie, dass es bei dieser Preisgestaltung billiger ist 25 statt 24 Rosenstöcke zu kaufen.

ii) Bestimmen Sie alle weiteren Werte von n, bei denen es billiger ist, mehr als n Rosenstöcke anstatt genau n zu kaufen.

---

8. a) Berechnen Sie, für welches n

$$log_{10}\left((1000\,!)^2\right) - log_{10}\left((999\,!)^2\right) = n\,!$$

gilt.

Hinweis:
Für jede natürliche Zahl n ist die Fakultät von n definiert als: $n\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \,\cdots\, \cdot n$

b) Ein Hase und ein Igel vereinbaren ein Wettrennen über 1000 m. Beim ersten Lauf ist der Igel noch 100 m von der Ziellinie entfernt, als der Hase diese gerade überschreitet.
Beim 2. Lauf bekommt der Igel einen Vorsprung von 100 m.
D. h. der Hase startet 100 m hinter dem Igel, so dass dessen Strecke nun 1100 m beträgt, während der Igel wie im ersten Lauf wieder 1000 m läuft.

Bestimmen Sie, wer dieses Rennen gewinnt und mit welchem Abstand die beiden durchs Ziel kommen.
Gehen Sie dabei davon aus, dass sowohl der Hase als auch der Igel während des gesamten Rennens in beiden Läufen jeweils mit der selben konstanten Geschwindigkeit laufen.

Lösungen zum Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2023

1. 1.Lösung:

Für die Steigungen von $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ gilt: $m_1 = -\dfrac{y-1}{2}$ und $m_2 = \dfrac{7-y}{4}$

Aus $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ folgt: $m_1 \cdot m_2 = -1 = -\dfrac{y-1}{2} \cdot \dfrac{7-y}{4} \quad \Rightarrow \quad y^2 - 8y + 15 = 0$

$\Rightarrow y = 3 \vee y = 5$

12P.

2. Lösung:

Es gilt $|\overline{AB}|^2 = (5-3)^2 + (7-1)^2 = 40$ und

$$|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2 = 2^2 + (y-1)^2 + 4^2 + (7-y)^2 = 2y^2 - 16y + 70$$

Aus Pythagoras folgt hieraus: $40 = 2y^2 - 16y + 70 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \vee y = 5$

---

2. a) Beispiele: 4P.

$981 - 189 = 792 = 8 \cdot 99$
$993 - 396 = 297 = 3 \cdot 99$
$402 - 204 = 198 = 2 \cdot 99$

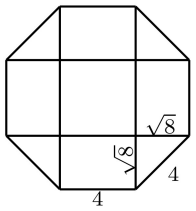
b) Der ggT dieser Differenzen ist stets 99 4P.

c) $abc - cba = 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 100 \cdot (a-c) + (c-a) = (a-c) \cdot 99$ 4P.

---

3. a) Seitenlänge des Achteckes ist 4, somit ergibt sich für dessen Flächeninhalt gemäß Abbildung: 3P.

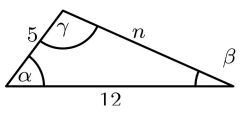
$A = 2 \cdot \left(\sqrt{8}\right)^2 + 4 \cdot \sqrt{8} \cdot 4 + 4^2 = 32 \cdot (1 + \sqrt{2})$



b) i) Damit die Dreiecksungleichungen erfüllt sind, muss gelten: $12 - 5 < n < 12 + 5$. 3P.

Also gibt es mit $n = 8,\ 9,\ \cdots,\ 16$ insgesamt 9 solcher Dreiecke.

ii) Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt: 3P.
$A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 \cdot \sin\alpha$.



Sie wird maximal, wenn $\sin\alpha$ maximal ist.

Für $n = 13$ ist das Dreieck rechtwinklig mit $\alpha = 90°$ und somit maximal.

iii) Damit α ein stumpfer Winkel ist, muss $n > 13$ sein (siehe *ii*)). 3P.

Damit γ ein stumpfer Winkel ist, muss gelten:
$n^2 + 5^2 < 12^2 \quad \Rightarrow \quad n < 11$

Insgesamt sind die Dreiecke somit für $n = 8, 9, 10$ und $n = 14, 15, 16$ stumpfwinklig.

4. 1.Lösung:

$A(x) = (p(x) - p_1(x)) \cdot 2x = (6 - 2x^2) \cdot 2x = 12x - 4x^3$

$A'(x) = 12 - 12x^2 \qquad A''(x) = -24x$

$A'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$, da $x > 0$. $\qquad A''(1) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum

$\Rightarrow$ Für $P(1|1)$ hat das Rechteck den maximalen Flächeninhalt $A(1) = 8\ (FE)$.

12P.

2.Lösung:

$12x - 4x^3 = 3b^2x - a^2x^3 \qquad$ Koeffizientenvergleich liefert: $a = 2\ , \quad b = 2$

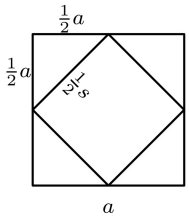
$\Rightarrow 12x - 4x^3 = 8 - \underbrace{(x-1)^2 \cdot (4x+8)}_{\geq 0,\ \text{da}\ x \geq 0}$

Somit nimmt der Ausdruck für $x = 1$ sein Maximum an.

---

5. a) Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Schnitt durch die Figur. Aus ihr geht hervor:

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad s = a \cdot \sqrt{2}$



4P.

b) Die Oberfläche besteht aus 8 gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge s.

Also ist $O = 8 \cdot \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3}a^2$

4P.

c) Die Oberfläche des Durchdringungskörpers besteht aus 6 Pyramiden, die auf den Seiten des Würfels stehen. Jede dieser Pyramiden halt 4 gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ als Seitenflächen.

Vom Würfel ragen Pyramiden aus dem Oktaeder, die als Seitenflächen jeweils 3 gleichschenklig, rechtwinklige Dreiecke mit Seitenlänge $\frac{a}{2}$ haben.

Insgesamt ergibt sich hieraus

$$O = 24 \cdot \left(\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^2}{4} \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right) = 3 \cdot (\sqrt{3} + 1)a^2$$

4P.

---

6. a) Für die Zehntausenderziffer gibt es 4 mögliche Ziffern zur Auswahl, danach bleiben für die Tausenderziffer noch 4, für die Hunderterziffer noch 3, für die Zehnerziffer noch 2 Ziffern und für die Einerziffer noch eine mögliche Ziffer zur Auswahl.

Insgesamt ergeben sich somit $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 4\,! = 96$ verschieden Möglichkeiten.

4P.

b) Aus diesen Ziffern lässt sich die alternierende Quersumme 22 bilden, indem die Ziffern 7; 8 und 9 addiert und die Ziffern 0 und 2 subtrahiert werden.

Daraus ergeben sich z. B. die Zahlen 92807 oder 90827, die ein Vielfaches von 11 sind.

4P.

c) Es gibt insgesamt $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9 \cdot 10^4$ verschiedene 5−stellige Zahlen.

Von diesen enthalten $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^4$ keine 7 als Ziffer.

Somit gibt es insgesamt $9 \cdot 10^4 - 8 \cdot 9^4 = 37512$ verschiedene 5− stellige Zahlen, die die Ziffer 7 mindestens 1−mal enthalten.

4P.

7. a) 1. Lösung:

$p(x) = x^2 - 8x - 16 = (x-4)^2 - 16 + c \quad \Rightarrow \quad c = 16$

4P.

2. Lösung:

$p(x) = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \underbrace{\sqrt{16 - c}}_{D}$

Die Parabel hat eine doppelte Nullstelle und berührt somit die $x-$Achse, für $D = 0 \quad \Rightarrow c = 16$

b) Da der $y - Wert$ des Scheitelpunktes negativ ist und die Parabel die $x-$Achse schneidet, folgt $a > 0$

4P.

Da die Nullstellen auf beiden Seiten der $y-$ Achse liegen, schneidet die Parabel diese im negativen Bereich. Somit folgt: $c < 0$

Aus $p(x) = a \cdot \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ folgt aus dem Scheitelpunkt:

$-\frac{b}{2a} = 4 \quad \Rightarrow \quad b = -8a \quad$ Mit $a > 0$ folgt: $b < 0$

c) Aus der Preistabelle folgt:

n	$\cdots$	22	23	24	25	$\cdots$	45	46	47	48	49	50	$\cdots$
$P(n)$	$\cdots$	264	276	288	275	$\cdots$	495	506	517	528	539	500	$\cdots$

4P.

Für $n = 23,\ 24$ ist es günstige 25 Rosenstöcke zu bestellen und für $n = 46,\ 47,\ 48,\ 49$ ist es günstiger 50 Rosenstöcke zu bestellen.

---

8. a) $\log_{10}\left((1000\,!)^2\right) - \log_{10}\left((999\,!)^2\right) = 2 \cdot \log_{10}\left(\frac{1000\,!}{999\,!}\right) = 2 \cdot \log_{10}(1000) = 2 \cdot 3 = 3\,!$

6P.

$\Rightarrow n = 3$

b) Sei v_H die Geschwindigkeit des Hasen und v_I die Geschwindigkeit des Igels.
Der Hase benötigt für 1000 m die selbe Zeit wie der Igel für 900 m
$\Rightarrow \frac{1000}{v_H} = \frac{900}{v_I} \quad \Rightarrow \frac{v_H}{v_I} = \frac{10}{9}$.
Im zweiten Rennen verhalten Sie die Strecken von Hase und Igel wie $\frac{1100}{1000} = \frac{11}{10}$
Da $\frac{11}{10} < \frac{10}{9}$ gewinnt der Hase auch dieses Rennen.
Er hat dafür die Zeit $t_H = \frac{1100}{v_H} = \frac{1100}{\frac{10}{9}v_I} = \frac{990}{v_I}$ benötigt.

6P.

D. h. der Igel ist in dieser Zeit die Strecke $t_H \cdot v_I = 990\ m$ gelaufen.

Somit beträgt der Abstand der beiden beim Zieleinlauf des Hasen 10 m.