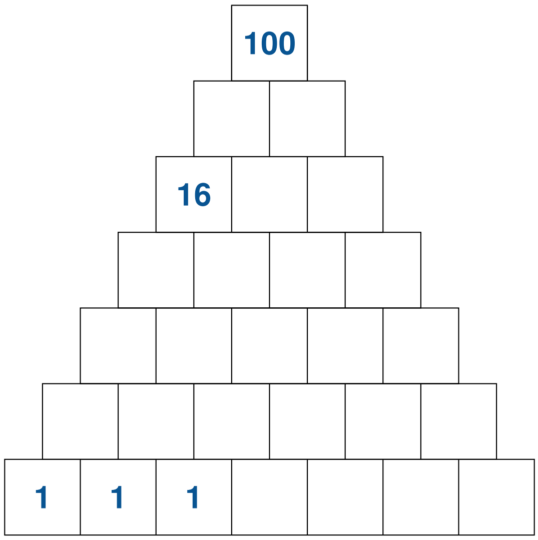
Tag der Mathematik 2026

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe G1

In die abgebildete Additionspyramide soll in jedes Quadrat eine natürliche Zahl geschrieben werden, so dass folgende Regel erfüllt ist: Die Summe zweier benachbarter Zahlen in einer Reihe steht im darüber liegenden Quadrat.



Fünf Zahlen sind bereits eingetragen.

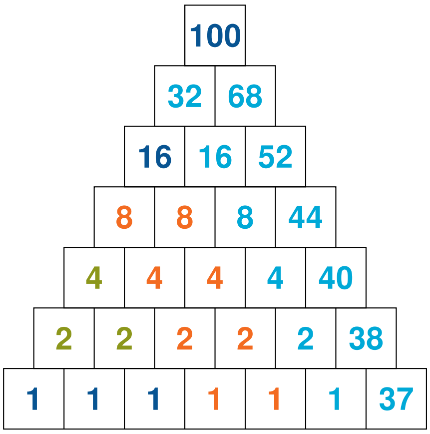
a) Füllen Sie die Additionspyramide aus, so dass die Regel erfüllt ist.

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

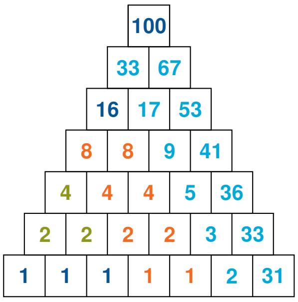
(Hinweis: Natürliche Zahlen sind die Zahlen 1, 2, 3, 4,. . .)

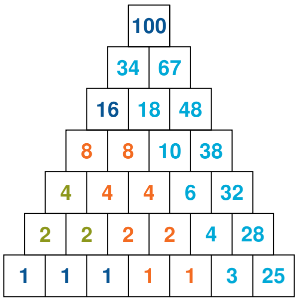
Lösung

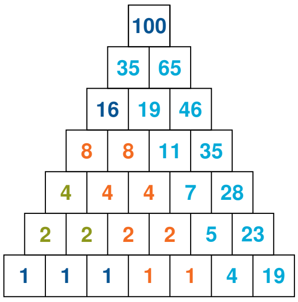
a) Das folgende Bild zeigt eine mögliche Lösung:

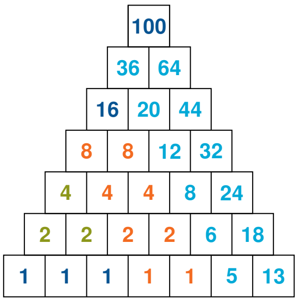


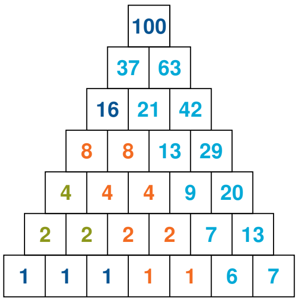
Es gibt sechs weitere Lösungen, die im Folgenden gezeigt werden:

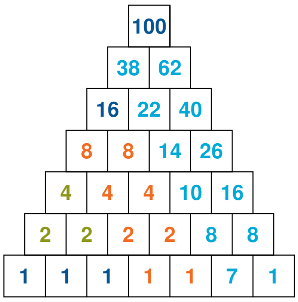






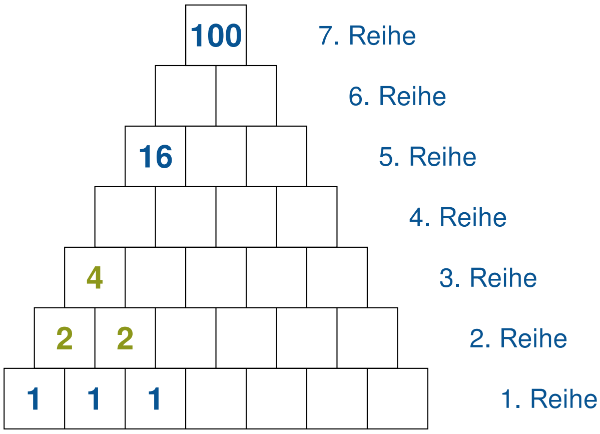






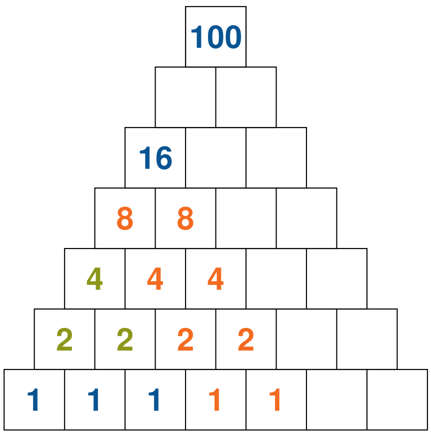
b) Wir nummerieren die Reihen unserer Additionspyramide von unten nach oben durch. Die unterste Reihe aus sieben Quadraten ist also Reihe 1, die zweitunterste Reihe aus sechs Quadraten ist Reihe 2 usw. Die Reihen selbst betrachten wir jeweils von links nach rechts.
Aus den drei 1en in der ersten Reihe erhalten wir nach der Spielregel die

grünen Zahlen in der zweiten und dritten Reihe.



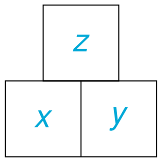
Weiterhin stellen wir fest: Nach Spielregel sind die Zahlen in den Quadraten von Reihe 1 mindestens 1, von Reihe 2 mindestens $1 + 1 = 2$. Daraus folgt, dass die Zahlen in Reihe 3 mindestens $2 + 2 = 4$ und in Reihe 4 mindestens $4 + 4 = 8$ sind.
Daraus folgt, dass auch die Zahlen im vierten und fünften Quadrat in Reihe 1 gleich 1 sein müssen: Wäre eine größer als 1, dann wäre eine der ersten beiden Zahlen in Reihe 4 größer als 8. Beide Zahlen sind mindestens 8. Also wäre ihre Summe größer als 16.

Daraus erhalten wir nun die orangefarbenen Zahlen in der abgebildeten Pyramide.



Um die möglichen Zahlen in den restlichen Kästchen zu bestimmen geben wir drei alternative Wege an und verwenden die folgende Vorüberlegung.

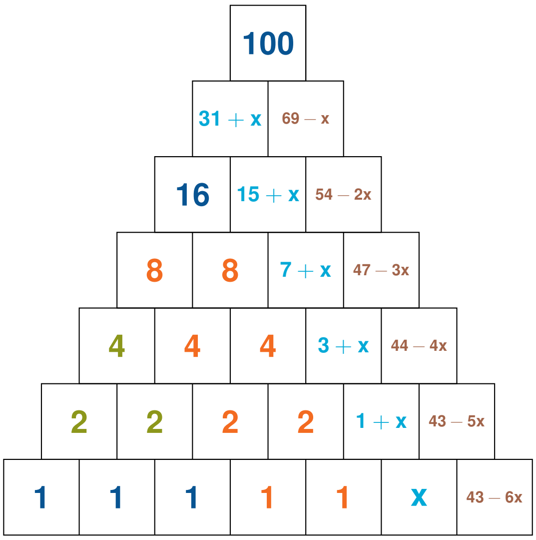
Vorüberlegung: In einer Teilpyramide aus drei Quadraten mit den Einträgen x, y und z wie im Bild, ergeben sich die Einträge der unteren Reihe als $x = z - y$ und $y = z - x$.



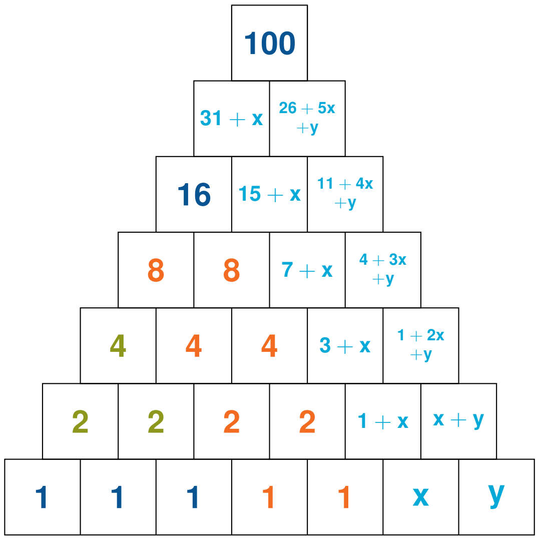
Alternative 1:
Wir bezeichnen den Eintrag in Reihe 1 im sechsten Quadrat mit x (s. Bild unten). Durch Anwenden der Regel erhalten wir zunächst die hellblauen Werte in der Pyramide. Aus diesen ergeben sich wiederum die braunen Werte. Aus

$$43 - 6x \geqslant 1$$

folgt $x \leqslant 7$. Somit kann x nur die Werte $1, \ldots, 7$ annehmen. Umgekehrt erhalten wir für die Wahl von x in $\{1, \ldots, 7\}$ eine Lösung wie in der Additionspyramide angegeben. Also erhalten wir sieben Lösungen.



Alternative 2:
Wir bezeichnen die Einträge in Reihe 1 im sechsten und im siebenten Quadrat mit x und y (s. Bild). Durch Anwenden der Regel erhalten wir die hellblauen Werte in der Pyramide.

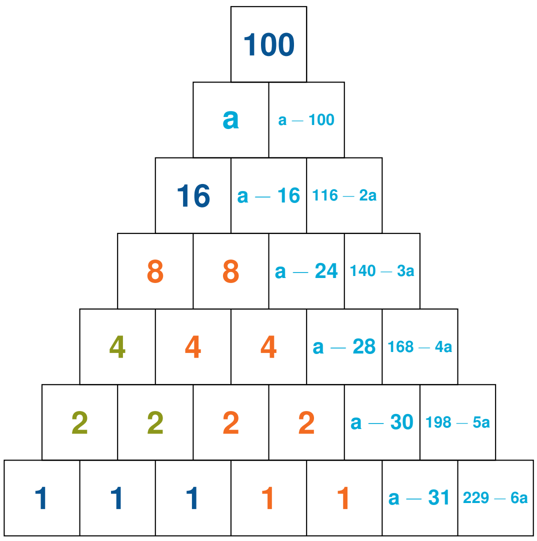


Um 100 zu erreichen, muss

$$(31 + x) + (26 + 5x + y) = 100$$

und somit $y = 43 - 6x$ gelten. Da $y \geqslant 1$ ist, kann x nur die Werte $1, \ldots, 7$ annehmen. Umgekehrt erhalten wir für die Wahl von x in $\{1, \ldots, 7\}$ und $y = 43 - 6x$ eine Lösung wie in der Additionspyramide angegeben. Wiederum sehen wir, dass es sieben Lösungen gibt.

Alternative 3:
Wir bezeichnen die Zahl im ersten Quadrat in Reihe 6 mit a (s. Bild). Dann ist die Zahl im zweiten Quadrat gleich 100-a. Schrittweise erhalten wir so die hellblauen Werte im Bild der Additionspyramide.



Die Werte $a - 31$ und $229 - 6a$ aus der ersten Reihe müssen beide größer gleich 1 sein. Das ergibt die Ungleichungen

$$a - 31 \geqslant 1 \qquad \text{und} \qquad 229 - 6a \geqslant 1$$

Diese sind äquivalent zu

$$a \geqslant 32 \qquad \text{und} \qquad a \leqslant \frac{228}{6} = 38$$

Somit kommen nur die Zahlen $32, \ldots, 38$ für a in Frage.
Umgekehrt erhalten wir für die Wahl von a in $\{32, \ldots, 38\}$ eine Lösung wie in der Additionspyramide angegeben. Also erhalten wir $38 - 31 = 7$ Lösungen.

Aufgabe G2

Nina trainiert für einen Marathon.

An jedem Trainingstag beginnt sie mit einer ersten Teilstrecke von 8 Kilometern.

Am Ende jeder Teilstrecke wirft sie eine Münze. Bei Kopf beendet sie das Training für diesen Tag, bei Zahl läuft sie eine weitere Teilstrecke, die aber nur halb so lang ist wie die vorhergehende. Das wiederholt sie solange, bis irgendwann Kopf kommt.

(Die Münze zeigt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Kopf bzw. Zahl.)

a) Wie weit läuft Nina, wenn sie drei mal Zahl und dann Kopf wirft?

b) Zeigen Sie, dass Nina nie weiter als 16 Kilometer läuft, egal wie oft Zahl kommt.

c) Nach einigen Tagen behält Nina zwar die Trainingsmethode bei, variiert aber, abhängig von ihrer gefühlten Tagesform, die Länge der ersten Startstrecke und startet nun statt mit 8 Kilometern auch mal mit 4, 12 oder 16 Kilometern.

   Wie weit läuft Nina in den drei Fällen jeweils, wenn sie drei mal Zahl und dann Kopf wirft?

d) Wie weit läuft Nina an einem Trainingstag durchschnittlich, wenn sie mit 16 Kilometern startet?

Lösung

a) Nina läuft
$$\left[8+4+2+1\right]\,\text{km} = 15\,\text{km}.$$

b) Selbst wenn Nina nie Kopf wirft, läuft sie maximal eine Gesamtstrecke von
$$S_{max} = 8 \cdot \left[1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} + \cdots\right]\ \text{km}.$$
   Die eckige Klammer ist eine geometrische Reihe mit Startwert 1 und Faktor $\frac{1}{2}$, also gilt
$$S_{max} = 8 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\,\text{km} = 16\,\text{km}.$$

c) Ist die Startstrecke um den Faktor f größer (oder kleiner) als 8 Kilometer, so gilt dies auch für die zweite und alle folgenden Teilstrecken. Bei gleicher Münzwurfserie ist dann die gesamte Trainingsstrecke auch um den Faktor f größer (oder kleiner).

Daher gilt:

Startstrecke 4 Kilometer $\Rightarrow$ Gesamtstrecke $S_4 = \frac{4}{8} \cdot 15\,\text{km} = 7{,}5\,\text{km}$
Startstrecke 12 Kilometer $\Rightarrow$ Gesamtstrecke $S_{12} = \frac{12}{8} \cdot 15\,\text{km} = 22{,}5\,\text{km}$
Startstrecke 16 Kilometer $\Rightarrow$ Gesamtstrecke $S_{16} = \frac{16}{8} \cdot 15\,\text{km} = 30\,\text{km}$.

d) Gesucht ist die durchschnittliche Trainingsstreckenlänge L_{16}, wenn Nina mit 16 Kilometern startet und dann immer halbiert.

Nach der ersten Teilstrecke von 16 Kilometern hört Nina mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ auf, und mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ macht sie weiter.

In diesem Fall läuft sie danach durchschnittlich noch so weit, wie an einem Tag, an dem sie mit 8 Kilometern begonnen hat, also L_8.

Also gilt:

$$L_{16} = 16\,\text{km} + \tfrac{1}{2} L_8$$

Bei gleicher Münzwurfserie ist die Gesamtstrecke proportional zur Startstrecke, daher gilt

$$\begin{aligned} L_8 &= \tfrac{1}{2} L_{16} \\ \Rightarrow L_{16} &= 16\,\text{km} + \tfrac{1}{4} L_{16} \\ \Rightarrow L_{16} &= \tfrac{64}{3}\,\text{km}\,. \end{aligned}$$

Alternative Lösung:

b) Wenn Nina n mal Zahl wirft, bevor Kopf kommt, läuft sie

$$8 \cdot \left[1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{2^n}\right]\ \text{km}$$

Der letzte Summand in der eckigen Klammer ist immer gerade das, was der Summe in der Klammer zum Wert 2 fehlt:

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{2} &= 2 - \tfrac{1}{2} \\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} &= 2 - \tfrac{1}{4} \\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} &= 2 - \tfrac{1}{8} \\ &\vdots \\ 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{2^n} &= 2 - \tfrac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Dieser Abstand zum Wert 2 wird durch jeden weiteren Summanden halbiert. Nina läuft also nie weiter als $8 \cdot \left[2 - \frac{1}{2^n}\right]\,\text{km} < 16\,\text{km}$.

c) Führe die Rechnungen von a) mit 3 verschiedenen Startstrecken durch.

d) Nina startet mit einer Startstrecke von 16 Kilometern.

Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hängt sie noch 8 Kilometer dran.

Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ hängt sie nochmal 4 Kilometer dran usw.

$$\begin{aligned} L_{16} &= 16\,\text{km} + \tfrac{1}{2} \cdot 8\,\text{km} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,\text{km} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^3 \cdot 2\,\text{km} + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \left(2^{4-n}\right)\,\text{km} + \cdots \\ &= 16 \cdot \left[1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4^2} + \tfrac{1}{4^3} + \cdots\right]\,\text{km}. \end{aligned}$$

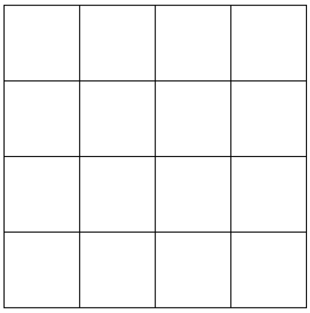
Der Term in der Klammer ist eine geometrische Reihe mit Faktor $\frac{1}{4}$.

Daraus folgt

$$L_{16} = 16 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\,\text{km} = \frac{64}{3}\,\text{km}.$$

Aufgabe G3

Gegeben ist ein quadratisches $(n \times n)$-Raster aus gleichgroßen Quadraten.



In das Raster wird genau ein Rechteck eingezeichnet. Die Seiten des Rechtecks verlaufen parallel zu den Gitterlinien, und die Eckpunkte des Rechtecks liegen auf den Gitterpunkten des Rasters.

Zwei Rechtecke gelten als unterschiedlich, wenn sie sich in Lage oder Größe unterscheiden.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein solches Rechteck…

a) …in ein (4×4)-Raster einzuzeichnen?

b) …in ein (8×8)-Raster einzuzeichnen?

c) …in ein $(n \times n)$-Raster einzuzeichnen?

Lösung

a) Wir beschriften die Gitterquadrate wie abgebildet und zählen für jeden Buchstaben, wie viele Rechtecke es gibt, die diesen Buchstaben im linken oberen Teilquadrat haben.

a	b	c	d
e	f	g	h
i	j	k	l
m	n	o	p

Für a gibt es $4 \cdot 4$ Möglichkeiten, für b $4 \cdot 3$, für c $4 \cdot 2$, für d $4 \cdot 1$.

Für e gibt es $3 \cdot 4$ Möglichkeiten, für f $3 \cdot 3$, für g $3 \cdot 2$, für h $3 \cdot 1$.

Für i gibt es $2 \cdot 4$ Möglichkeiten, für j $2 \cdot 3$, für k $2 \cdot 2$, für l $2 \cdot 1$.

Für m gibt es $1 \cdot 4$ Möglichkeiten, für n $1 \cdot 3$, für o $1 \cdot 2$, für p $1 \cdot 1$.

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
4 \cdot (4+3+2+1) &= 4 \cdot 5 \cdot \tfrac{4}{2} = 40 && \text{(1. Zeile)}\\
3 \cdot (4+3+2+1) &= 3 \cdot 5 \cdot \tfrac{4}{2} = 30 && \text{(2. Zeile)}\\
2 \cdot (4+3+2+1) &= 2 \cdot 5 \cdot \tfrac{4}{2} = 20 && \text{(3. Zeile)}\\
1 \cdot (4+3+2+1) &= 1 \cdot 5 \cdot \tfrac{4}{2} = 10. && \text{(4. Zeile)}
\end{aligned}$$

Insgesamt liegt die Anzahl der Möglichkeiten also bei

$$(4+3+2+1) \cdot (4+3+2+1) = \left(5 \cdot \tfrac{4}{2}\right)\left(5 \cdot \tfrac{4}{2}\right) = 100.$$

b) Der Buchstabe bezeichnet erneut das linke obere Teilquadrat des Rechtecks.

a	b	c	…				
i	j	…					
q	…						

Für a gibt es $8 \cdot 8$ Möglichkeiten, für b $8 \cdot 7$, …, für h $8 \cdot 1$.

Für i gibt es $7 \cdot 8$ Möglichkeiten, für j $7 \cdot 7$, …, für k $7 \cdot 1$.

Wird dieses Muster für alle Felder fortgesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
8 \cdot (8+7+6+5+4+3+2+1) &= 8 \cdot 9 \cdot \tfrac{8}{2} = 288 && \text{(1. Zeile)}\\
7 \cdot (8+7+6+5+4+3+2+1) &= 7 \cdot 9 \cdot \tfrac{8}{2} = 252 && \text{(2. Zeile)}\\
&\ \vdots\\
1 \cdot (8+7+6+5+4+3+2+1) &= 1 \cdot 9 \cdot \tfrac{8}{2} = 36. && \text{(8. Zeile)}
\end{aligned}$$

Insgesamt liegt die Anzahl der Möglichkeiten also bei

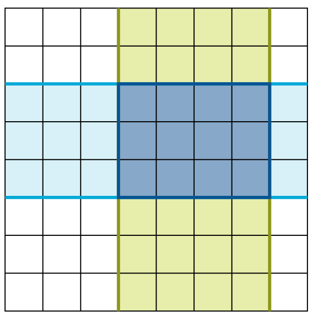
$$(8+7+6+5+4+3+2+1) \cdot (8+7+6+5+4+3+2+1) = \left(9 \cdot \tfrac{8}{2}\right)\left(9 \cdot \tfrac{8}{2}\right) = 36^2.$$

c) Analog zu a) und b) liegt die Anzahl der Möglichkeiten insgesamt bei

$$
\begin{aligned}
&\Big(n+(n-1)+\cdots+2+1\Big)\cdot\Big(n+(n-1)+\cdots+2+1\Big)\\
=&\Big((n+1)\cdot\tfrac{n}{2}\Big)\Big((n+1)\cdot\tfrac{n}{2}\Big)\\
=&(n+1)^2\cdot\tfrac{n^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Alternative Lösung:
Man zählt für jede Rechtecksgröße, wie viele Rechtecke dieser Größe man in dem Raster unterbringen kann:
Für Rechtecke der Größe 1×1 gibt es im (4×4)-Quadrat $4\cdot 4$ Möglichkeiten, für die Größe 1×2 sind es $4\cdot 3$, für 1×3 noch $4\cdot 2$ und für 1×4 nur $4\cdot 1$.
Für Rechtecke der Größe $2\times n$ erhält man nacheinander $3\cdot 4, 3\cdot 3, 3\cdot 2$ und $3\cdot 1$ Möglichkeiten usw.
Diese Art zu zählen führt also auf die gleiche Rechnung wie oben:
Es gibt $(4+3+2+1)\cdot(4+3+2+1)$ Rechtecke im (4×4)-Quadrat.
Für das (8×8)- und das $(n\times n)$-Quadrat erhält man die gleichen Ausdrücke wie oben.

Weitere alternative Lösung (exemplarisch für Teil b)**:**
Verlängert man die Seiten eines beliebigen, entlang der Gitternetzlinien verlaufenden Rechtecks innerhalb des 8×8 Gitternetzes, so erhalten wir einen waagerechten und einen senkrechten Streifen, deren Schnitt gerade das Rechteck erzeugt.



Umgekehrt erzeugen verschiedene Streifen auf eindeutige Weise verschiedene Rechtecke.

Es genügt also, die Zahl der verschiedenen möglichen waagerechten/senkrechten Streifen zu bestimmen. Jeder Streifen wird durch zwei parallele Linien des Gitters eindeutig festgelegt.

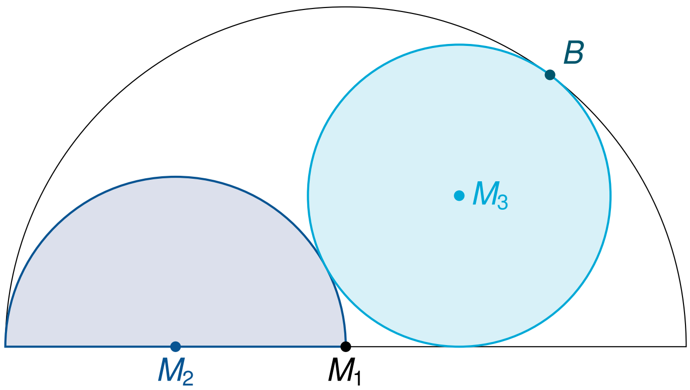
Das Gitter hat je 9 waagerechte und senkrechte Linien, aus denen wir jeweils zwei auswählen.

Dafür gibt es

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot (9-2)!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

Möglichkeiten in jeder Richtung. Insgesamt gibt es also 36^2 verschiedene Rechtecke.

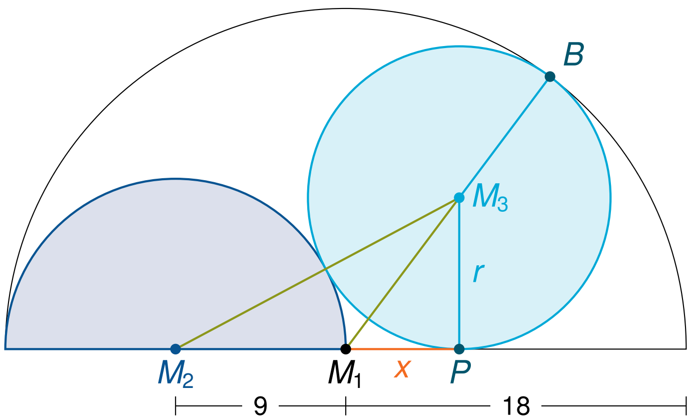
Aufgabe G4



In einem Halbkreis um M_1 mit dem Radius 18 liegen ein weiterer Halbkreis um M_2 und ein Vollkreis um M_3, der beide Halbkreise berührt. B markiert den Berührpunkt der Kreisbögen um M_1 und M_3 (siehe Abbildung).

Berechnen Sie den Radius des Vollkreises.

Lösung



Sei $R = 18$ der Radius des Halbkreises um M_1 und r der Radius des Vollkreises um M_3. Es ist

$$|M_2M_3| = 9 + r.$$

Da sich die Kreisbögen im Punkt B berühren, liegen die Punkte M_1, M_3 und B auf einem Radius des großen Halbkreises und es gilt:

$$|M_1B| = 18 \qquad \text{und} \qquad |M_1M_3| = 18 - r.$$

Sei $x := |M_1P|$. Die beiden Dreiecke $\triangle M_1PM_3$ sowie $\triangle M_2PM_3$ sind rechtwinklig in P, daher gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} & & x^2 + r^2 &= (18 - r)^2 \\ & & &= 324 - 36r + r^2 \\ &\Leftrightarrow & x^2 &= 324 - 36r \\ &\Leftrightarrow & 36r &= 324 - x^2, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & & (9 + x)^2 + r^2 &= (9 + r)^2 \\ &\Leftrightarrow & 81 + 18x + x^2 + r^2 &= 81 + 18r + r^2 \\ &\Leftrightarrow & x^2 + 18x &= 18r \\ &\Leftrightarrow & 2x^2 + 36x &= 36r. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} & & 324 - x^2 &= 2x^2 + 36x \\ &\Leftrightarrow & 3x^2 + 36x - 324 &= 0 \\ &\Leftrightarrow & x^2 + 12x - 108 &= 0 \\ &\Rightarrow & x_{1,2} &= -6 \pm \sqrt{36 + 108} \\ & & &= -6 \pm \sqrt{144} \\ & & &= -6 \pm 12. \end{aligned}$$

Damit ist $x_1 = -18$ und $x_2 = 6$, wobei einzig $x_2 = 6$ die relevante Lösung ist. Damit folgt für den gesuchten Radius

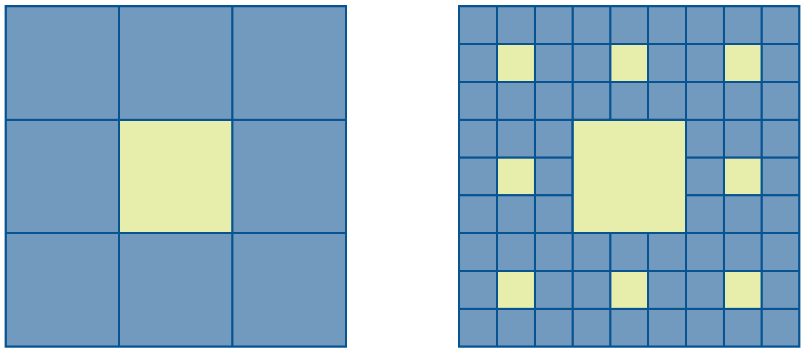
$$r = \tfrac{324 - 6^2}{36} = \tfrac{288}{36} = 8.$$

Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof
Internet: zfm.education · Email: tdm@zfm.education

Aufgabe E1

Ein quadratischer Teppich mit $9\,\mathrm{m}$ Seitenlänge wird im ersten Schritt in neun gleiche Quadrate aufgeteilt. Das mittlere Quadrat wird anschließend herausgeschnitten.

Im zweiten Schritt wird mit den verbleibenden Quadraten ebenso verfahren.



a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des löchrigen Teppichs nach den ersten beiden Schritten.

b) Berechnen Sie seinen Flächeninhalt nach dem dritten Schritt, wenn man das Verfahren fortsetzt.

   (Hinweis: Das Ergebnis kann als Produkt, Summe oder Potenz angegeben werden.)

c) Geben Sie einen Term an, mit dem sich der Flächeninhalt des löchrigen Teppichs nach n Schritten berechnen lässt.

Lösung

a) Zu Beginn hat der Teppich eine Fläche von

$$A_0 = (9\,\mathrm{m})^2 = 81\,\mathrm{m}^2.$$

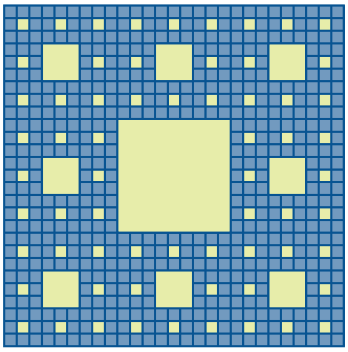
Nach Schritt eins liegt der Flächeninhalt bei

$$A_1 = (9\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m}) \cdot \left(\tfrac{9\,\mathrm{m}}{3}\right)^2 = 8\,\mathrm{m} \cdot 3^2\,\mathrm{m} = 8\,\mathrm{m} \cdot 9\,\mathrm{m} = 72\,\mathrm{m}^2.$$

Es werden nun acht verbleibende Quadrate weiter verarbeitet. Die Seitenlänge von jedem dieser acht Quadrate beträgt $\frac{9\,\mathrm{m}}{3} = 3\,\mathrm{m}$. Die Fläche jedes neu zu entfernenden Quadrates beträgt also $\left(\frac{3\,\mathrm{m}}{3}\right)^2 = 1\,\mathrm{m}^2$ und es werden im zweiten Schritt acht solcher Quadrate entfernt. Insgesamt beträgt die im zweiten Schritt entfernte Fläche also $8 \cdot 1\,\mathrm{m}^2 = 8\,\mathrm{m}^2$. Damit beträgt die verbleibende Gesamtfläche nach dem zweiten Schritt

$$A_2 = A_1 - 8\,\mathrm{m}^2 = 64\,\mathrm{m}^2.$$

b) Wir argumentieren analog zu Schritt zwei. Nach dem zweiten Schritt existieren 64 Quadrate.



Die Seitenlänge von jedem dieser 64 Quadrate beträgt 1 m. Die Fläche jedes neu zu entfernenden Quadrates beträgt also

$$\left(\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{3}\,\mathrm{m}\right)^2 = \tfrac{1}{9}\,\mathrm{m}^2$$

und es werden im zweiten Schritt 64 solcher Quadrate entfernt. Insgesamt beträgt die im dritten Schritt entfernte Fläche also

$$64 \cdot \tfrac{1}{9}\,\mathrm{m}^2 = \tfrac{64}{9}\,\mathrm{m}^2.$$

Damit beträgt die verbleibende Gesamtfläche nach dem dritten Schritt

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2 - \tfrac{64}{9}\,\mathrm{m}^2 \\ &= 64\,\mathrm{m}^2 - \tfrac{64}{9}\,\mathrm{m}^2 \\ &= 64\,\mathrm{m}^2 - 7\tfrac{1}{9}\,\mathrm{m}^2 \\ &= 56\tfrac{8}{9}\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

c) Wir argumentieren analog zu Schritt zwei und drei. Nach dem $(n-1)$-ten Schritt existieren 8^{n-1} Quadrate. Die Seitenlänge von jedem dieser 8^{n-1} Quadrate beträgt $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$ m. Die Fläche jedes neu zu entfernenden Quadrates beträgt also $\left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}\,\mathrm{m}\right)^2 = \left(\frac{1}{9}\right)^{n-2}\,\mathrm{m}^2$ und es werden im n-ten

Schritt 8^{n-1} solcher Quadrate entfernt. Insgesamt beträgt die im n-ten Schritt entfernte Fläche also

$$8^{n-1} \cdot \left(\tfrac{1}{9}\right)^{n-2} \mathrm{m}^2 = 9 \cdot \left(\tfrac{8}{9}\right)^{n-1} \mathrm{m}^2.$$

Damit beträgt die verbleibende Gesamtfläche nach dem n-ten Schritt

$$\begin{aligned}
A_n &= A_{n-1} - 9\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(\tfrac{8}{9}\right)^{n-1} \\
&= A_{n-2} - 9\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(\tfrac{8}{9}\right)^{n-1} - 9\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(\tfrac{8}{9}\right)^{n-2} \\
&= A_0 - 9\,\mathrm{m}^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\tfrac{8}{9}\right)^{i} \qquad \text{(geometrische Reihe)} \\
&= 81\,\mathrm{m}^2 - 9\,\mathrm{m}^2 \cdot \frac{1-\left(\tfrac{8}{9}\right)^n}{1-\tfrac{8}{9}} \\
&= 81\,\mathrm{m}^2 - 81\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(1-\left(\tfrac{8}{9}\right)^n\right) \\
&= 81\,\mathrm{m}^2 \cdot \left(\tfrac{8}{9}\right)^n
\end{aligned}$$

Alternative Lösung:
In jedem Schritt wird jedes Teilquadrat der verbleibenden Gesamtfläche in $3 \times 3 = 9$ gleichgroße Flächen (Quadrate) aufgeteilt, davon bleiben nach dem Herausschneiden 8 Quadrate. Es gilt also:

a)
$$\begin{aligned}
A_0 &= (9\,\mathrm{m})^2 = 81\,\mathrm{m}^2 \\
A_1 &= \tfrac{8}{9} \cdot A_0 = 72\,\mathrm{m}^2 \\
A_2 &= \tfrac{8}{9} \cdot A_1 = 64\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}$$

b)
$$A_3 = \tfrac{8}{9} \cdot A_2 = 56\tfrac{8}{9}\,\mathrm{m}^2$$

c)
$$\begin{aligned}
A_n &= \tfrac{8}{9} \cdot A_{n-1} \\
&= \left(\tfrac{8}{9}\right)^2 \cdot A_{n-2} \\
&= \left(\tfrac{8}{9}\right)^3 \cdot A_{n-3} \\
&= \left(\tfrac{8}{9}\right)^n \cdot A_0 \\
&= \left(\tfrac{8}{9}\right)^n \cdot 81\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}$$

Aufgabe E2

Für die ganzen Zahlen a, b, c gelte $0 < a < b < c$. Zeigen Sie:

a) $(c-a)(c-b)(b-a)$ ist gerade.

b) $P = a \cdot b \cdot c \cdot (c-a)(c-b)(b-a)$ ist durch 12 teilbar.

Lösung

a) Zu zeigen ist, dass mindestens einer der drei Faktoren gerade ist.
Nennen wir „Parität“ die Eigenschaft einer Zahl, gerade oder ungerade zu sein, so müssen zwei der drei Zahlen a, b, c die gleiche Parität haben. Sind das zum Beispiel a und b, so ist $b-a$ gerade.

b) Zu zeigen ist, dass P sowohl durch 4 als auch durch 3 teilbar ist.

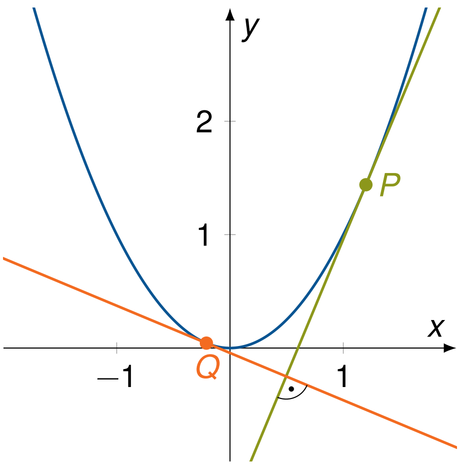
   (i) P ist durch 4 teilbar:
   Ist eine der drei Zahlen a, b, c gerade, so ist P wegen a) durch 4 teilbar.
   Sind a, b und c alle ungerade, so sind alle drei Differenzen gerade, und P ist sogar durch 8 teilbar, insbesondere also auch durch 4.

   (ii) P ist durch 3 teilbar:
   Ist eine der Zahlen a, b, c durch 3 teilbar, so gilt das auch für P.
   Andernfalls lassen alle drei Zahlen bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2. Mindestens zwei der Zahlen lassen also den gleichen Rest bei Division durch 3, und deren Differenz ist dann durch 3 teilbar.

Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof
Internet: zfm.education · Email: tdm@zfm.education

Aufgabe E3

Sei P ein Punkt auf der Normalparabel $f(x) = x^2$.
Ist P nicht der Ursprung, so gibt es einen Punkt Q auf der Parabel, sodass die Tangente an Q die Tangente an P orthogonal schneidet.



a) Bestimmen Sie die Koordinaten von Q.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke $\overline{PQ}$.

c) Auf welcher Ortskurve liegen diese Mittelpunkte, wenn P alle vom Ursprung verschiedenen Punkte der Parabel durchläuft?

Lösung

a) P habe die Koordinaten $(p \,|\, p^2)$ mit $p \neq 0$. Die Tangente in P hat die Steigung

$$m_P = f'(p) = 2p.$$

Hat Q die Koordinaten $(q \,|\, q^2)$, so hat die Tangente in Q die Steigung

$$m_q = 2q.$$

Die Tangenten in P und Q schneiden sich orthogonal, wenn

$$\begin{aligned} m_p \cdot m_q &= -1 \\ \Leftrightarrow \quad 2p \cdot 2q &= -1. \end{aligned}$$

Also ist $q = -\frac{1}{4p}$ und Q hat also die Koordinaten $\left(-\frac{1}{4p} \,\middle|\, \frac{1}{16p^2}\right)$.

b) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$ hat die Koordinaten

$$m_x = \frac{p+q}{2}$$
$$m_y = \frac{p^2+q^2}{2}.$$

Einsetzen von $q = -\frac{1}{4p}$ aus a) ergibt

$$m_x = \frac{1}{2}\left(p - \frac{1}{4p}\right) = \frac{1}{8p}(4p^2 - 1)$$
$$m_y = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{1}{16p^2}\right) = \frac{1}{32p^2}(16p^4 + 1).$$

c) Gesucht ist eine Gleichung zwischen m_x und m_y.
Da in m_y nur p^4 und in m_x nur p^2 vorkommt, liegt es nahe, m_x^2 zu berechnen:

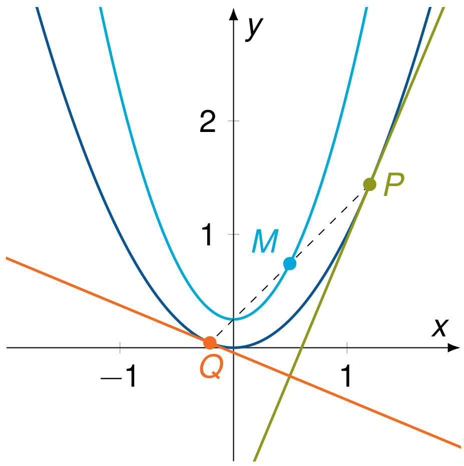
$$m_x^2 = \frac{1}{64p^2}(16p^4 - 8p^2 + 1).$$

Der Vergleich mit m_y zeigt:

$$m_x^2 = \frac{1}{2}m_y - \frac{8}{64} = \frac{1}{2}m_y - \frac{1}{8}.$$

Folglich liegen die Mittelpunkte auf der Parabel

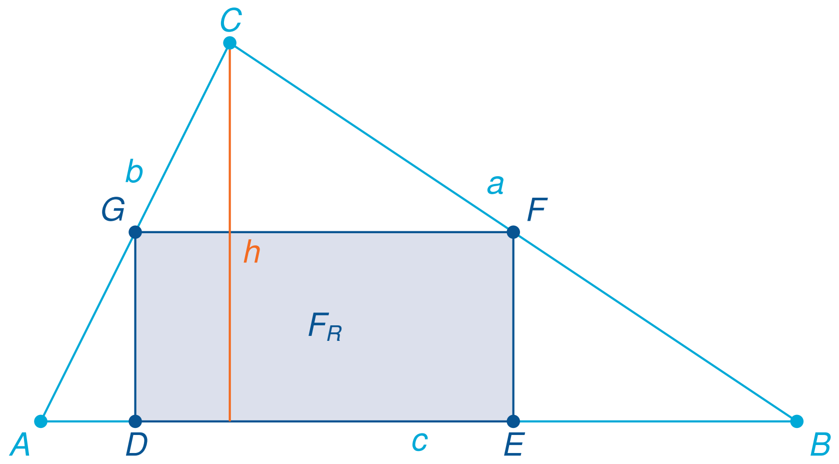
$$f_M(x) = 2x^2 + \frac{1}{4}.$$



Bemerkung:
Das Ergebnis zeigt, dass die Mittelpunkte auf dem Graph einer geraden Funktion liegen, also symmetrisch zur y-Achse sind.
Das sieht man auch unmittelbar geometrisch: Ist P' der Spiegelpunkt von P bezüglich der y-Achse, so ist der zugehörige Punkt Q' der Spiegelpunkt von Q. Also geht die Strecke $\overline{P'Q'}$ aus $\overline{PQ}$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor. Das gilt dann natürlich auch für die Mittelpunkte.

Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof
Internet: zfm.education · Email: tdm@zfm.education

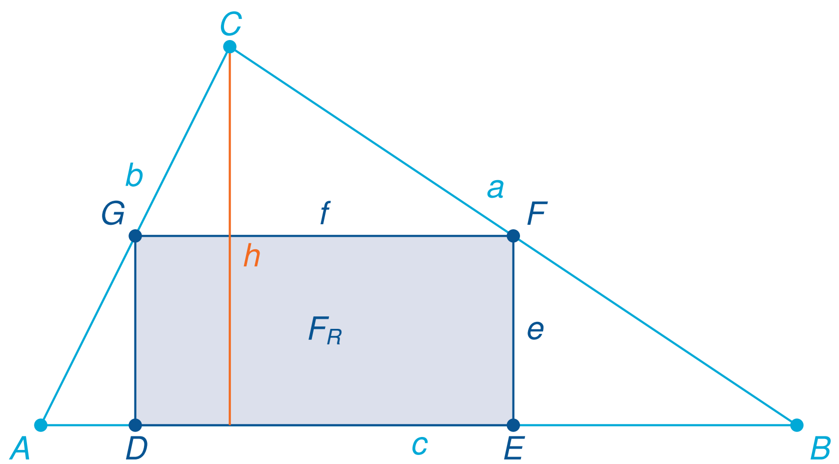
Aufgabe E4



In das Dreieck $\triangle ABC$ wird ein Rechteck $DEFG$ einbeschrieben, sodass zwei Eckpunkte auf der Seite $\overline{AB}$ liegen und das Rechteck maximale Fläche F_R hat.

Wie groß ist diese Fläche, wenn die Fläche des Dreiecks 1 Quadratmeter ist? (Mit Begründung)

Lösung



Wir fassen den Flächeninhalt des Rechteckes als Funktion auf, die von den

Seitenlängen e und f abhängt:

$$F_R(e,f) = e \cdot f \qquad \text{(Zielfunktion)}$$

Die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle GFC$ sind ähnlich. Daher gilt

$$\begin{aligned} \tfrac{c}{h} &= \tfrac{f}{h-e} \\ \Rightarrow \quad f &= \tfrac{c(h-e)}{h}. \end{aligned} \qquad \text{(Nebenbedingung)}$$

Damit lässt sich die Funktion F_R darstellen als:

$$F_R(e) := e \cdot f = e \cdot \tfrac{c(h-e)}{h} = c \cdot \left[e - \tfrac{e^2}{h}\right].$$

Das Maximum dieser Funktion können wir über die Ableitung

$$F_R'(e) = c \cdot \left[1 - \tfrac{2e}{h}\right]$$

bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} F_R'(e) &= 0 \\ \Rightarrow \quad e &= \tfrac{h}{2} \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung F_R'' gilt

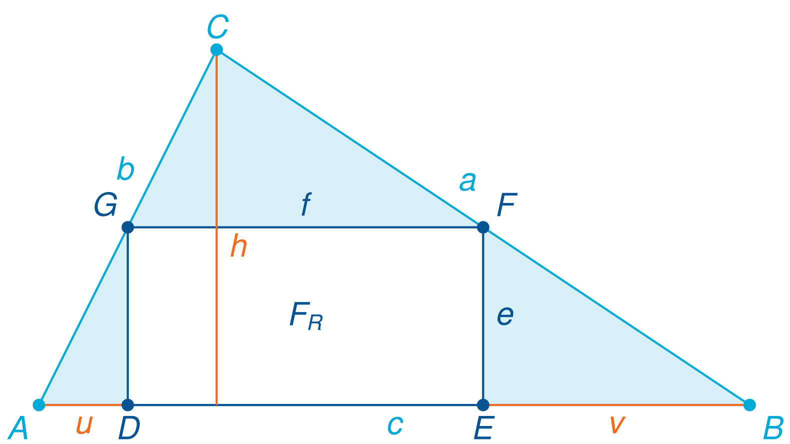
$$F_R''(e) = -\tfrac{2c}{h} < 0$$

für alle e, also hat $F_R(e)$ ein globales Maximum im Punkt $e = \frac{h}{2}$. Für den Flächeninhalt des Rechtecks ergibt sich mit $f = \frac{c}{2}$:

$$F_R = F_R(\tfrac{h}{2}) = \tfrac{ch}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{ch}{2}.$$

Das Rechteck hat also die halbe Fläche des Dreiecks, also 0,5 Quadratmeter.

Alternative Lösung (Punkte 1-4)**:**



Die Fläche F_R des Rechtecks ergibt sich aus der Fläche F_D des Dreiecks $\triangle ABC$, wenn man die Flächen der 3 kleinen Dreiecke $\triangle ADG$, $\triangle EBF$ und $\triangle GFC$ abzieht:

$$\begin{aligned} F_R &= F_D - F_{ADG} - F_{EBF} - F_{GFC} \\ &= \tfrac{ch}{2} - \tfrac{ue}{2} - \tfrac{ve}{2} - \tfrac{f(h-e)}{2} \\ &= \tfrac{ch}{2} - \tfrac{(u+v)e}{2} - \tfrac{f(h-e)}{2} \\ &= \tfrac{ch}{2} - \tfrac{(c-f)e}{2} - \tfrac{f(h-e)}{2} \\ &= \tfrac{ch-ce+fe-fh+fe}{2} \\ &= ef + \tfrac{ch-ce-fh}{2} \end{aligned}$$

Wegen $F_R = ef$ muss nun

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{ch-ce-fh}{2} \\ \Rightarrow \quad f &= \tfrac{ch-ce}{h} \end{aligned}$$

gelten. Auch so lässt sich F_R als Funktion $F_R(e)$ definieren, die lediglich von e abhängt:

$$F_R(e) := ef = c \cdot \left[e - \tfrac{e^2}{h}\right]$$

Alternative Lösung (Punkte 1 und 2)**:**
Die Geraden durch $\overline{AB}$ und $\overline{GF}$ sind parallel. Für die von C ausgehenden Dreiecksseiten, die $\overline{AB}$ und $\overline{GF}$ schneiden, gilt der Strahlensatz. Daher gilt:

$$\begin{aligned} \tfrac{c}{f} &= \tfrac{a}{|CF|} = \tfrac{h}{h-e} \\ \Rightarrow \quad \tfrac{c}{h} &= \tfrac{f}{h-e}. \end{aligned}$$

Aufgabe H1

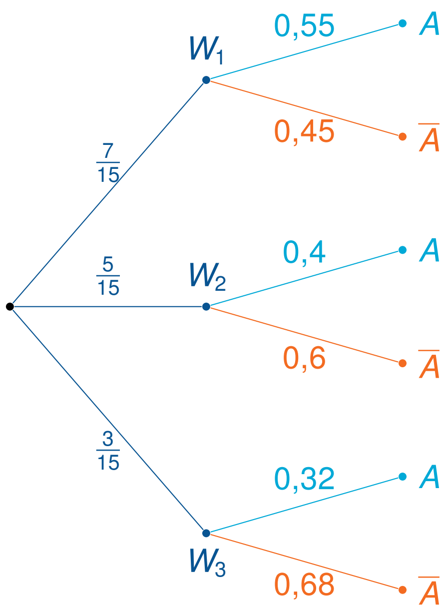
Bei einer Meinungsumfrage vor einer Wahl ermittelte man, dass von den befragten, wahlberechtigten Personen...

- ... 55 % der Personen, die jünger als 40 Jahre sind, für die Partei A stimmen.
- ... 40 % der Personen, die zwischen 40 und 60 Jahren sind, für die Partei A stimmen.
- ... 32 % der Personen, die älter als 60 Jahre sind, Partei A wählen wollen.

Die Anzahl der Wähler in den drei Altersgruppen steht im Verhältnis 7 : 5 : 3. Mit wieviel Prozent der Stimmen kann die Partei A aufgrund dieses Umfrageergebnisses bei der Wahl rechnen?

Lösung

Die drei Altersgruppen für unter 40 Jahre, 40-60 Jahre und über 60 Jahre seien W_1, W_2 und W_3 bezeichnet.



Für das Ereignis „eine zufällig ausgewählte Person wählt die Partei A“ mit der Wahrscheinlichkeit $p(A)$ gilt dann

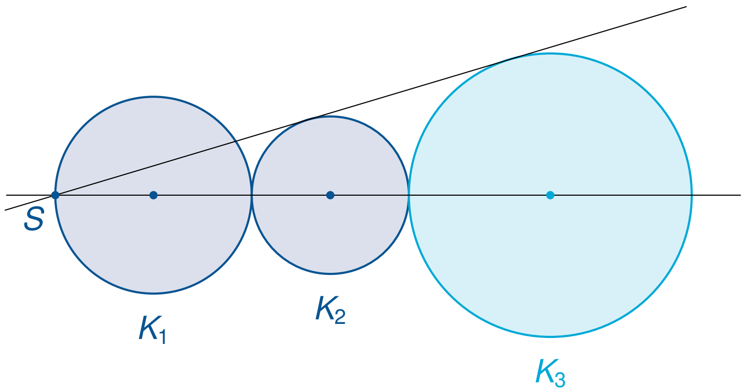
$$\begin{aligned} p(A) &= p(W_1) \cdot p_{W_1}(A) + p(W_2) \cdot p_{W_2}(A) + p(W_3) \cdot p_{W_3}(A) \\ &= \tfrac{7}{15} \cdot 0{,}55 + \tfrac{5}{15} \cdot 0{,}4 + \tfrac{3}{15} \cdot 0{,}32 \\ &= \tfrac{1}{15} \cdot (3{,}85 + 2 + 0{,}96) \\ &= 0{,}454. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Partei A kann also mit einem Stimmenanteil von 45,4 % rechnen.

Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof
Internet: zfm.education · Email: tdm@zfm.education

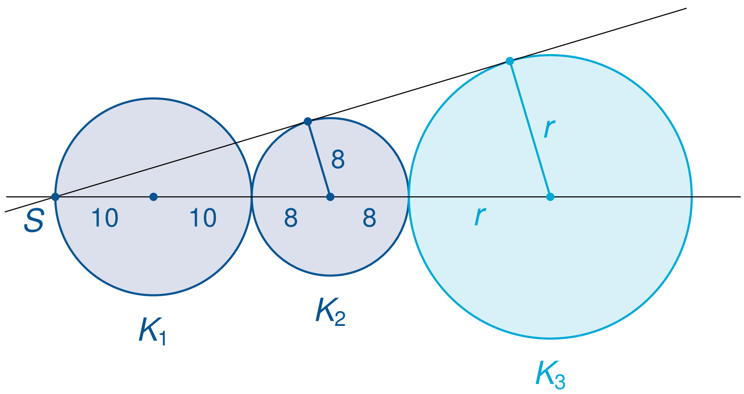
Aufgabe H2

Drei Kreise K_1, K_2 und K_3, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen, stoßen mit ihren Umfängen aneinander. Der erste Kreis hat den Radius 10 und der zweite den Radius 8. Durch den äußeren Schnittpunkt S des ersten Kreises mit der Geraden läuft eine zweite Gerade, die den Kreis K_2 und auch den Kreis K_3 tangiert.



Wie groß ist der Radius des dritten Kreises K_3?

Lösung



Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

$$\begin{aligned} & \frac{r}{10+10+8+8+r} = \frac{8}{10+10+8} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{r}{36+r} = \frac{2}{7} \\ \Leftrightarrow \quad & r = \frac{72}{5}. \end{aligned}$$

Aufgabe H3

Gesucht sind drei verschiedene Primzahlen $p_1 < p_2 < p_3$ mit der Eigenschaft, dass

$$((p_1 + 1) \cdot p_2 + 1) \cdot p_3 + 1$$

wieder eine Primzahl ist.

a) Bestimmen Sie p_1.

b) Geben Sie ein mögliches Tupel (p_1, p_2, p_3) an.

Lösung

Es gilt

$$((p_1 + 1) \cdot p_2 + 1) \cdot p_3 + 1 = 1 + p_3 + p_2 p_3 + p_1 p_2 p_3.$$

Die vier Summanden können nicht alle ungerade sein, sonst wäre die Summe gerade und als Primzahl käme nur 2 in Frage. Die Summe ist aber deutlich größer als 2. Es gibt also mindestens einen geraden Summanden, der als Produkt von Primzahlen den Faktor 2 enthalten muss. Da 2 die kleinste Primzahl ist, gilt $p_1 = 2$.

Zum Beispiel erfüllen $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 7)$ die Bedingung.

(Ebenso $(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 13)$ oder $(p_1, p_2, p_3) = (2, 5, 7)$ und viele weitere.)

$(p_1, p_2, p_3) = (2, 3, 5)$ liefert $((2+1)3+1)5+1 = 51 = 3 \cdot 17$ also keine Primzahl.

Aufgabe H4

Die drei Freunde Max, Tom und Fritz sitzen beim Kartenspiel. Als Einsatz hat jeder einige Spielmarken. Bei jeder Spielrunde zahlt der Verlierer an die beiden anderen so viele Spielmarken, dass sich deren Besitz verdoppelt.

Beim ersten Spiel verliert Max, bei der zweiten Runde verliert Tom und beim letzten Spiel hat Fritz das Nachsehen. Erstaunt stellen die Freunde nach drei Spielrunden fest, dass jeder von ihnen nun acht Spielmarken besitzt.

Wie viele Spielmarken hatten Max, Tom und Fritz vor dem ersten Spiel?

Lösung

Hier bietet sich das Rückwärtsarbeiten an. Insgesamt sind 24 Marken im Spiel.

	Max	Tom	Fritz
Nach der 3. Runde	8	8	8
Nach der 2. Runde	4	4	16
Nach der 1. Runde	2	14	8
Vor der 1. Runde	13	7	4

Da nach der letzten Runde alle 8 Marken haben, müssen Tom und Max nach der zweiten Runde 4 Marken haben. Fritz muss also $24 - 8 = 16$ Marken haben.

Da nach der zweiten Runde Tom verteilt, muss Max nach der ersten Runde 2 Marken und Fritz 8 Marken haben. Somit bleiben für Tom $24 - 2 - 8 = 14$ Marken.

Vor der ersten Runde hatten also Tom 7, Fritz 4 und Max $24 - 7 - 4 = 13$ Marken.

Aufgabe H5

Geben Sie die kleinste natürliche Zahl $k > 1$ an, für die

$$\sqrt{k \cdot \sqrt{k \cdot \sqrt{k}}}$$

ebenfalls eine natürliche Zahl ist.

Lösung

Es gilt

$$\sqrt{k \cdot \sqrt{k \cdot \sqrt{k}}} = \sqrt{k \cdot \sqrt{k \cdot k^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{k \cdot \sqrt{k^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{k \cdot k^{\frac{3}{4}}} = \sqrt{k^{\frac{7}{4}}} = k^{\frac{7}{8}}.$$

Damit $k^{\frac{7}{8}}$ eine natürliche Zahl ist, muss k eine Zahl der Form n^8 sein. Die kleinste solche Zahl, die größer als 1 ist, ist $k = 2^8 = 256$.

Alternative Lösung (1. Teil)**:**

$$\begin{aligned}
& & \sqrt{k \cdot \sqrt{k \cdot \sqrt{k}}} &= n \\
\Rightarrow & & k \cdot \sqrt{k \cdot \sqrt{k}} &= n^2 \\
\Rightarrow & & k^2 \cdot k \cdot \sqrt{k} &= n^4 \\
\Rightarrow & & k^4 \cdot k^2 \cdot k &= n^8 \\
\Rightarrow & & k^7 &= n^8 \\
\Rightarrow & & k^{\frac{7}{8}} &= n
\end{aligned}$$

Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof
Internet: zfm.education · Email: tdm@zfm.education

Aufgabe H6

Jemand hat alle natürlichen Zahlen von 1 bis 200 aufgeschrieben. Dann wurden die 2, 3, 5 und 7 und alle ihre Vielfachen sowie die 1 gestrichen. Danach blieben von den 200 Zahlen noch 46 übrig.

Wieviele davon sind Primzahlen?

Lösung

Eine Zahl n, die keine Primzahl ist, hat mindestens 2 Primfaktoren. Der kleinste dieser Primfaktoren ist dann höchstens $\sqrt{n} \leqslant \sqrt{200} < \sqrt{225} = 15$.

Zahlen, die unter den ersten 200 Zahlen noch nicht gestrichen sind und keine Primzahlen sind, enthalten also als kleinsten Primfaktor entweder 11 oder 13, da die Vielfachen von 2, 3, 5 und 7 schon gestrichen sind. Der zweite Primfaktor ist dann höchstens $200/11 \approx 18{,}18$. Hier kommen also nur die Primzahlen 11, 13 und 17 in Frage:

$$\begin{aligned}
11 \cdot 11 &= 121 < 200\\
11 \cdot 13 &= 143 < 200\\
11 \cdot 17 &= 187 < 200\\
13 \cdot 13 &= 169 < 200\\
13 \cdot 17 &= 221 > 200
\end{aligned}$$

Unter den verbliebenen 46 Zahlen sind also 42 Primzahlen.
Zusammen mit 2, 3, 5 und 7 gibt es 46 Primzahlen kleiner 200.

Bemerkung:
Beim Sieb des Eratosthenes werden zunächst alle ganzen Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Obergrenze aufgeschrieben. Dabei stehen in jeder Zeile immer gleich viele Zahlen.

Zunächst streicht man die 1, dann ist die kleinste verbleibende Zahl die Primzahl 2. Streicht man nun alle Vielfachen von 2 (2 inklusive), so ist die kleinste verbleibende Zahl die Primzahl 3. So kann man nach und nach alle Primzahlen finden.

Aufgabe H7

Marry ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt, wie Anne war, als Marry so alt war, wie Anne jetzt ist.

Wie alt ist Anne?

Lösung

Die Aufgabenstellung bezieht sich auf zwei Zeitebenen:

a) Den gegenwärtigen Zeitpunkt, zu dem Marry 24 Jahre alt ist und

b) einen Zeitpunkt, der n Jahre zurück liegt.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

- M ist das gegenwärtige Alter von Marry (also $M = 24$).
- A ist das gegenwärtige Alter von Anne.
- n ist die Differenz zwischen den beiden Zeitebenen.

Aus dem ersten Teilsatz „Sie ist doppelt so alt, wie Anne war“ folgt

$$2 \cdot (A - n) = M.$$

Aus dem zweiten Teilsatz „als Marry so alt war, wie Anne jetzt ist“ folgt

$$M - n = A.$$

Wir setzen die zweite Gleichung in die erste ein und erhalten

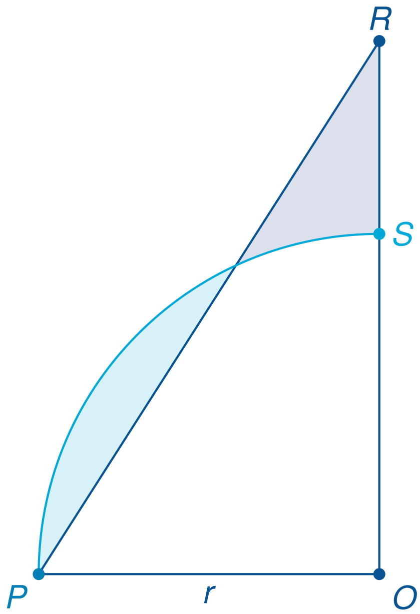
$$2(M - n - n) = M \quad \Rightarrow \quad n = \tfrac{M}{4} = 6.$$

Mit $n = 6$ ergibt die zweite Gleichung

$$M - 6 = A \quad \Rightarrow \quad A = 24 - 6 = 18.$$

Damit ist Anne 18 Jahre alt.

Aufgabe H8



Die Figur zeigt einen Viertelkreis SP mit Mittelpunkt O und Radius r, sowie ein Dreieck $\triangle ORP$. Die beiden farbigen Bereiche haben denselben Flächeninhalt.

Wie lang ist die Strecke $\overline{OR}$?

Lösung

Wenn die beiden farbigen Bereiche denselben Flächeninhalt haben, dann haben auch die Flächen, die durch Kombination jeweils einer der farbigen Flächen zusammen mit der weißen Fläche im Dreieck entstehen, den gleichen Flächeninhalt.

Damit hat der Viertelkreis SP mit Mittelpunkt O denselben Flächeninhalt wie das Dreieck $\triangle ORP$.

Es folgt

$$\frac{\pi}{4} \cdot r^2 = \frac{1}{2} r \cdot |OR| \quad \Leftrightarrow \quad |OR| = \frac{\pi}{2} \cdot r.$$

Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof
Internet: zfm.education · Email: tdm@zfm.education