Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2026

Hausaufgabenversion

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1: (Bi-)Quadratische Gleichungen

Berechnen Sie die Lösungsmenge.

a) $x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 1 = 0$

b) $(\cos x)^2 + \frac{3}{2}\cos x = 1;\ x \in [0{,}2\pi]$

c) $(\sin(2x+1))^2 + \frac{3}{2}\sin(2x+1) = 1;\ x \in [0{,}\pi]$

Lösung

a) Es handelt sich um eine biquadratische Gleichung, Substitution $z = x^2$ ergibt:

$$z^2 + \frac{3}{2}z - 1 = 0.$$

pq-Formel mit $p = \frac{3}{2}$ und $q = -1$ ergibt

$$\begin{aligned} & z = \frac{-3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} \\ & = \frac{-3}{4} \pm \frac{5}{4} \\ \Rightarrow \quad & z = \frac{1}{2} \ \vee\ z = -2. \end{aligned}$$

Resubstitution führt zu

$$\begin{aligned} & x^2 = \frac{1}{2} \ \vee\ x^2 = -2 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{2}\sqrt{2} \ \vee\ x = \frac{-1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

und es ergibt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\frac{-1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right\}$.

b) Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, Substitution $z = \cos x$ ergibt wie in a):

$$z^2 + \frac{3}{2}z - 1 = 0$$

und damit

$$\begin{aligned} & \cos x = \frac{1}{2} \ \vee\ \cos x = -2 \\ \Rightarrow \quad & x = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

c) Es handelt sich erneut um eine quadratische Gleichung, Substitution $z = \sin(2x+1)$ ergibt wie in a):

$$z^2 + \frac{3}{2}z - 1 = 0$$

und damit

$$\sin(2x+1) = \tfrac{1}{2} \lor \sin(2x+1) = -2.$$

Substitution $u = 2x+1$ ergibt

$$\begin{aligned} && \sin(u) &= \tfrac{1}{2} \lor \sin(u) = -2 \\ \Rightarrow && u &= \tfrac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

Resubstitution führt zu

$$\begin{aligned} && 2x+1 &= \tfrac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow && x &= \tfrac{\pi}{12} - \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Verschiebung auf Bereich zwischen 0 und π durch Addition von π (Funktion ist π-periodisch) ergibt:

$$x = \tfrac{13\pi}{12} - \tfrac{1}{2}$$

also die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{ \frac{13\pi}{12} - \frac{1}{2} \right\}$.

Aufgabe 2: Summe der Kubikzahlen

Die Summe der ersten n Kubikzahlen $s_n := 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$ lässt sich durch die Formel

$$s_n = \left(\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4} = \tfrac{1}{4}\cdot n^4 + \tfrac{1}{2}\cdot n^3 + \tfrac{1}{4}\cdot n^2$$

beschreiben.

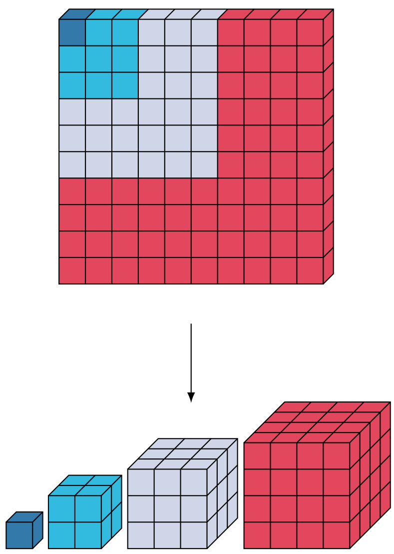
a) Berechnen Sie s_1, s_2 und s_3 und zeigen Sie, dass die Formel für die ersten drei Summen korrekt ist.

b) Die Abbildung zeigt eine Veranschaulichung der Formel für die Summe der ersten Kubikzahlen.

   i) Zeigen Sie, dass die Anzahl der gleich gefärbten kleinen Würfel immer einer Kubikzahl entspricht.

   ii) Erklären Sie die Formel anhand der Abbildung.

c) Beweisen Sie die Formel für die Summe der ersten n Kubikzahlen mit Hilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion.



$(1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$

Lösung

a) $s_1 = 1$; $s_2 = 9$; $s_3 = 36$.
Die Formel ergibt für $n = 1$:

$$\tfrac{1}{4}\cdot 1^4 + \tfrac{1}{2}\cdot 1^3 + \tfrac{1}{4}\cdot 1^2 = 1.$$

Die Formel ergibt für $n = 2$:

$$\tfrac{1}{4}\cdot 2^4 + \tfrac{1}{2}\cdot 2^3 + \tfrac{1}{4}\cdot 2^2 = 4 + 4 + 1 = 9.$$

Die Formel ergibt für $n = 3$:

$$\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 + \tfrac{1}{2}\cdot 3^3 + \tfrac{1}{4}\cdot 3^2 = 20{,}25 + 13{,}5 + 2{,}25 = 36.$$

b) i) Das rote Feld soll die Zahl 4^3 veranschaulichen. Es gibt ein quadratisches Feld mit 4×4 Kästchen und zwei Felder mit je

$$4 \times (1+2+3) = 4 \times 6 = 24$$

Kästchen, zusammen 64 Kästchen.
Allgemein: Die Zahl n^3 soll veranschaulicht werden. Es gibt ein quadratisches Feld mit $n \times n$ Kästchen und zwei Felder mit

$$n \times (1+2+\cdots+(n-1)) = n \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot (n^3 - n^2)$$

Kästchen, zusammen $n^3 - n^2 + n^2 = n^3$ Kästchen.

ii) Alle Farben zusammen ergeben eine Anzahl von

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Kästchen.

c) Die Induktionsverankerung mit $n = 1$ ergibt sich aus dem in a) berechneten $s_1 = 1$. Wir zeigen, dass gilt:

$$s_{n+1} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

Wenn $s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, dann ist

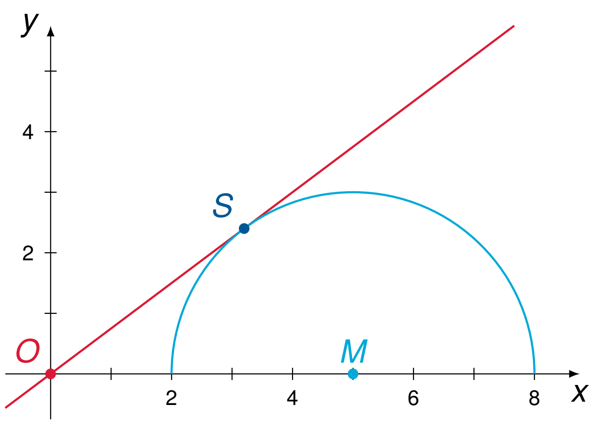
$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= s_n + (n+1)^3 \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n^2+2n+1)\cdot n^2}{4} + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&= \frac{n^4}{4} + \frac{3n^3}{2} + \frac{13n^2}{4} + 3n + 1 \\
&= \frac{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}{4} \\
&= \frac{n^4+4n^3+4n^2+2n^3+8n^2+8n+n^2+4n+4}{4} \\
&= \frac{(n^2+2n+1)(n^2+4n+4)}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Halbkreis und Gerade

In einem Koordinatensystem befindet sich oberhalb der 1. Achse ein Halbkreis um den Punkt $M = (5\,|\,0)$ mit Radius $r = 3$. Seine Gleichung ist

$$y = \sqrt{9 - (x-5)^2}.$$

Dieser Kreis wird von einer Ursprungsgerade im Punkt S berührt.



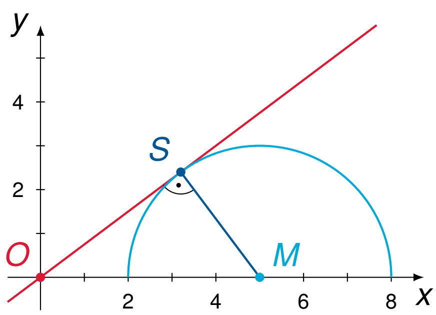
a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OMS.

b) Berechnen Sie die Höhe h des Dreiecks OMS zur Grundseite OM.

c) Berechnen Sie die Gleichung der Ursprungsgerade.

d) Berechnen Sie die Steigung an jedem beliebigen Punkt $(x_0\,|\,y_0)$ des Halbkreises um M und untersuchen Sie, wie sich die Steigung verhält, wenn sich x_0 (von rechts) dem Wert 2 annähert.

Lösung



a) Wir zeichnen die Strecke $\overline{SM}$ ein.

Diese steht senkrecht auf der Geraden durch O und S.

Damit gilt der Satz von Pythagoras im Dreieck OMS, mit $\overline{OM} = 5$ und $\overline{MS} = 3$.

Man erhält

$$\overline{OS} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Wählt man $\overline{SO}$ als Grundseite und $\overline{SM}$ als Höhe, so erhält man

$$A_{OMS} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

b) Wegen

$$A_{OMS} = \frac{\overline{OM} \cdot h}{2}$$

gilt $6 = \frac{5h}{2}$ und somit $h = 2{,}4$.

c) Für die x-Koordinate von S gilt $x^2 + 2{,}4^2 = 4^2$ und somit $x = \sqrt{16 - 5{,}76} = 3{,}2$. Mit $S = (3{,}2 \,|\, 2{,}4)$ ergibt sich eine Geradengleichung von $y = \frac{3}{4}x$.

d) Ein beliebiger Punkt P des Halbkreises um M hat die Koordinaten

$$(x_0 \,|\, \sqrt{9 - (x_0 - 5)^2}).$$

Eine Gerade durch M und P hat dann die Steigung

$$m = \frac{\sqrt{9-(x_0-5)^2}}{x_0-3} = \frac{\sqrt{-16+10x_0-x_0^2}}{x_0-3} = \frac{\sqrt{(x_0-2)(8-x_0)}}{x_0-3}$$

Die Tangente an den Kreis in P hat also die Steigung

$$-\frac{1}{m} = \frac{x_0-3}{\sqrt{(x_0-2)(8-x_0)}}.$$

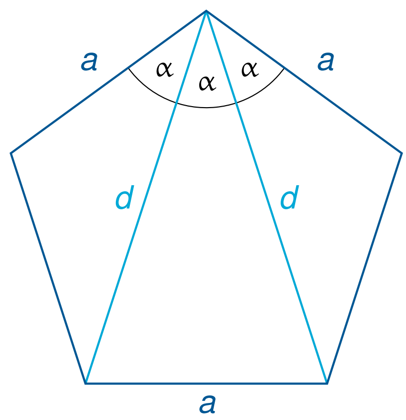
Für die Annäherung von x_0 von rechts an 2 ergibt sich

$$\lim_{2<x_0\to 2} \frac{x_0-3}{\sqrt{(x_0-2)(8-x_0)}} = \lim_{2<x_0\to 2} \frac{1}{\sqrt{(x_0-2)\cdot 6}} = +\infty.$$

Aufgabe 4: Goldener Schnitt

Der Goldene Schnitt τ entspricht dem Verhältnis $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

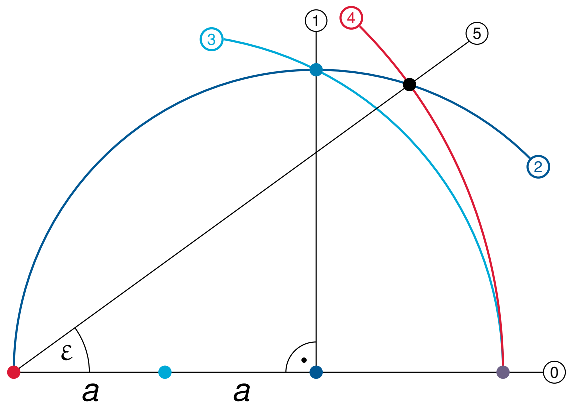
Er entspricht dem Seitenverhältnis der Länge der Diagonalen d zur Seitenlänge a im regelmäßigen Fünfeck. Errichtet man ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkeln der Länge a und einer Basis der Länge d, so beträgt der Basiswinkel $\alpha = 36°$.



a) Erklären Sie, warum der Winkel α gerade 36° beträgt.

b) Zeigen Sie, dass im regelmäßigen Fünfeck das Verhältnis von Diagonale zu Seitenlänge dem Goldenen Schnitt τ entspricht.

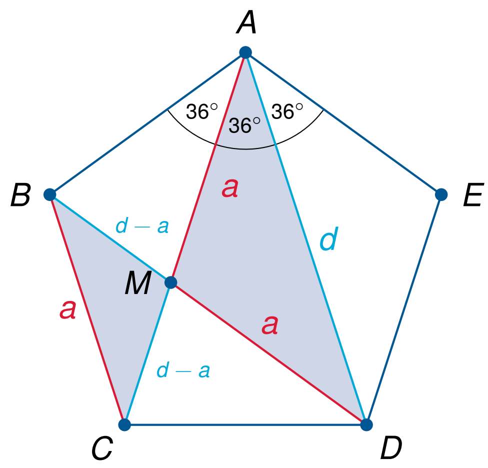
c) Zeigen Sie, dass in der Figur der Winkel ε ebenfalls 36° beträgt.



Lösung

a) Ein regelmäßiges Fünfeck hat den Innenwinkel $\frac{3\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Ein Teildreieck, bestehend aus der Seite d und zwei Seiten der Länge a ist gleichschenklig, der Winkel in der Spitze beträgt 108°. Dann muss der Basiswinkel 36° groß sein.

b) Die Diagonalen BD und AC schneiden sich im Punkt M. Die gleichschenkligen Dreiecke BCM und AMD sind ähnlich, da sie jeweils den Winkel 108° in der Spitze haben. Damit ergibt sich die Verhältnisgleichung:



$$\begin{aligned} & \frac{d}{a} = \frac{a}{d-a} \\ \Leftrightarrow \quad & d^2 - ad = a^2 \\ \Leftrightarrow \quad & d^2 - ad - a^2 = 0. \end{aligned}$$

Mit der pq-Formel erhalten wir:

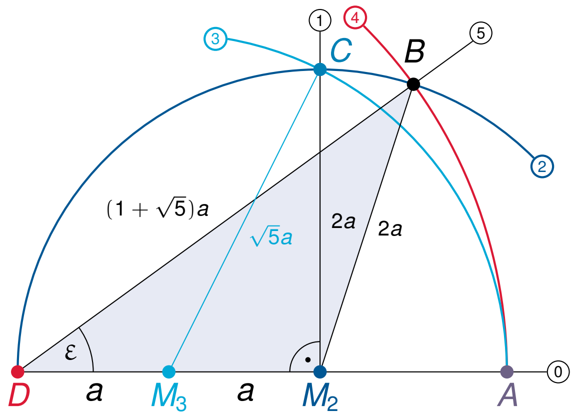
$$\begin{aligned} d_{1,2} &= \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} \\ &= \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \\ &= \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} a. \end{aligned}$$

Wegen $d > a$ kommt hier der Minus-Ast nicht in Frage. Also gilt

$$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

c) Da die Strecken jeweils Radien von Kreis 2 um M_2 sind gilt

$$\overline{M_2B} = \overline{M_2C} = \overline{DM_2} = 2a.$$



Weiterhin ist

$$\overline{M_3A} = \overline{M_3C} = \sqrt{5}a,$$

da es sich um Radien von Kreis 3 um M_2 handelt, deren Länge sich aus dem Satz des Pythagoras im Dreieck M_3CM_2 erschließt. Nun gilt $\overline{DB} = \overline{DA}$, da beides Radien des Kreises 4 sind und somit

$$\overline{DB} = \overline{DA} = a + \sqrt{5}a = (1+\sqrt{5})a.$$

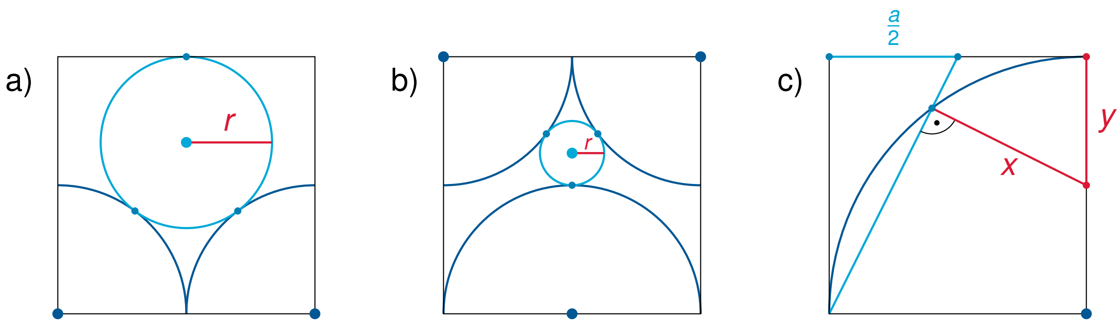
Wir betrachten das gleichschenklige Dreieck M_2DB: Der Quotient $\frac{\overline{DB}}{2a}$ ergibt

$$\frac{\overline{DB}}{2a} = \frac{(1+\sqrt{5})a}{2a} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}.$$

Das entspricht dem Verhältnis τ des goldenen Schnitts. Folglich ist $\alpha = 36°$.

Aufgabe 5: Pythagoras im Quadrat

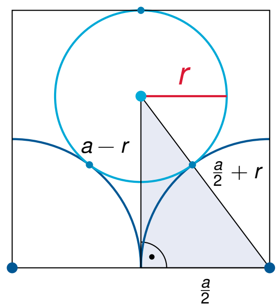
Das Quadrat hat jeweils Seitenlänge a. Berechnen Sie die Größen r, x und y.



Hinweis zu c): Fügen Sie ein weiteres Quadrat rechts an und ergänzen Sie die Skizze.

Lösung

a) Es gilt

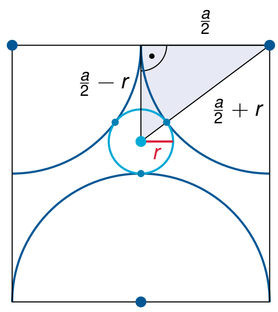


$$\begin{aligned} & (0{,}5a + r)^2 = (0{,}5a)^2 + (a - r)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{4}a^2 + ar + r^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + a^2 - 2ar + r^2 t \\ \Leftrightarrow\quad & 3ar - a^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a(3r - a) = 0 \end{aligned}$$

Da $a = 0$ ausscheidet, bleibt

$$3r = a \quad\Leftrightarrow\quad r = \tfrac{1}{3}a.$$

b) Es gilt

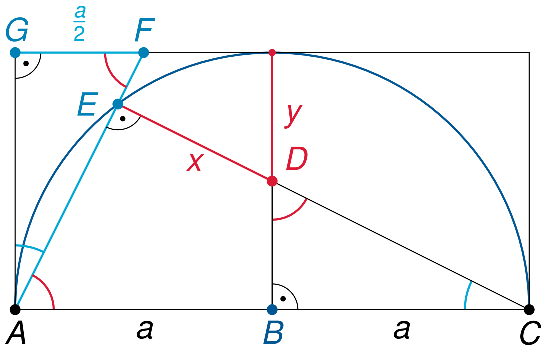


$$\begin{aligned} & (0{,}5a + r)^2 = (0{,}5a)^2 + (0{,}5a - r)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \tfrac{1}{4}a^2 + ar + r^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - ar + r^2 \\ \Leftrightarrow\quad & 2ar - \tfrac{1}{4}a^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a(2r - \tfrac{1}{4}a) = 0 \end{aligned}$$

Da $a = 0$ ausscheidet, bleibt

$$2r = \tfrac{1}{4}a \quad\Leftrightarrow\quad r = \tfrac{1}{8}a.$$

c) Das angebaute Kästchen verdeutlicht, dass der Halbkreis ein Thaleskreis ist mit dem Durchmesser $2a$ und dem rechten Winkel bei E.



Die Dreiecke GFA, CAE und CBD sind ähnlich, CBD und GFA sogar kongruent. Daher ist $y = 0{,}5a$ und

$$\overline{AF} = \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Wegen der Ähnlichkeit von CAE und CBD gilt die folgende Verhältnisgleichung zwischen längerer Kathete und Hypotenuse:

$$\begin{aligned}
& \frac{2a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a + x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{a} \\
\Leftrightarrow \quad & 2a^2 = \frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a + x\right) \\
\overset{a\neq 0}{\Rightarrow} \quad & 2a = \frac{5}{4}a + \frac{\sqrt{5}}{2}x \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{3}{4}a = \frac{\sqrt{5}}{2}x \\
\Leftrightarrow \quad & x = \frac{3}{2\sqrt{5}}a = \frac{3}{10}\sqrt{5}a
\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Gewinnwahrscheinlichkeit bei Würfeln (nach Huygens)

Die Spieler A und B würfeln abwechselnd mit zwei idealen Würfeln gleichzeitig. Spieler A beginnt. Er gewinnt, wenn A die Augensumme 6 erzielt, B gewinnt dagegen, wenn B die Augensumme 7 würfelt. Das Spiel endet, wenn einer der beiden Spieler gewonnen hat.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln die Augensumme 6 bzw. 7 zu erzielen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A in der vierten Runde gewinnt bzw. dass B in der vierten Runde gewinnt.

c) Berechnen Sie die Gesamtgewinnwahrscheinlichkeit von A.

Hinweis: Nutzen Sie hierzu den folgenden Zusammenhang (sog. geometrische Reihe):

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

d) Um die Gewinnwahrscheinlichkeit von A zu verbessern, darf A ausnahmsweise beim ersten Wurf mit nur einem Würfel würfeln. Er gewinnt, wenn er die Augenzahl 6 erzielt. Dann geht das Spiel wie bisher weiter. Berechnen Sie nun die Gewinnwahrscheinlichkeit von A.

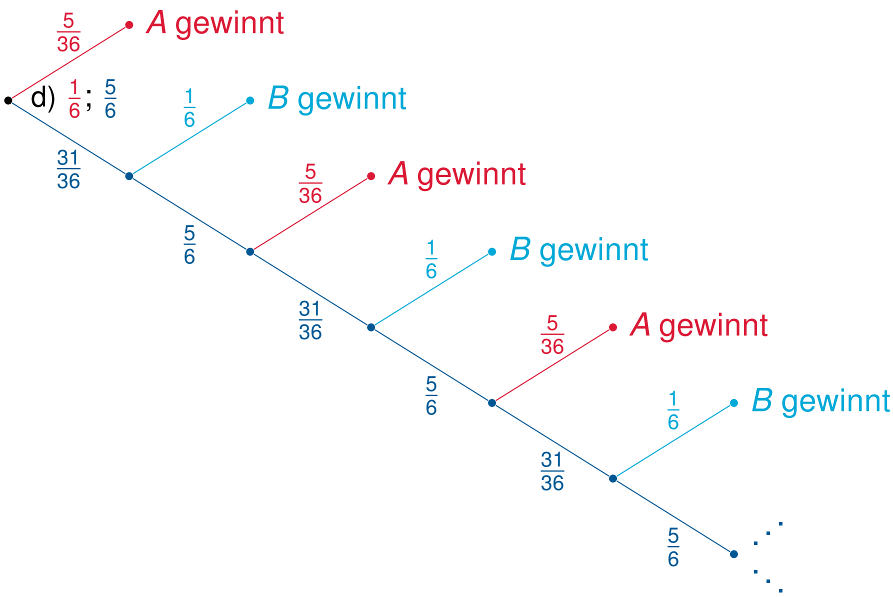
Lösung

a) Eine Augensumme von 6 tritt bei Würfelergebnissen 15, 51, 24, 42 und 33 auf, also ist

$$p(6) = \frac{5}{36}.$$

Eine Augensumme von 7 tritt bei Würfelergebnissen 16, 61, 25, 52, 34 und 43 auf, also ist

$$p(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$



b) Es gilt:

$$p(A \text{ gewinnt in der 4. Runde}) = \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{36} \approx 0{,}05132$$

$$p(B \text{ gewinnt in der 4. Runde}) = \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{31}{36} \cdot \frac{1}{6} \approx 0{,}05303$$

c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
p(A\text{ gewinnt}) &= \tfrac{5}{36} + \left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)\cdot\tfrac{5}{36} + \left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^2\cdot\tfrac{5}{36} + \left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^3\cdot\tfrac{5}{36} + \cdots \\
&= \tfrac{5}{36}\cdot\left(1 + \left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^1 + \left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^3 + \cdots\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tfrac{5}{36}\cdot\left(\left(\tfrac{155}{216}\right)^0 + \left(\tfrac{155}{216}\right)^1 + \left(\tfrac{155}{216}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{155}{216}\right)^n\right) \\
&\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \lim_{n\to\infty} \tfrac{5}{36}\cdot\frac{1-\left(\frac{155}{216}\right)^{n+1}}{1-\frac{155}{216}} \\
&= \tfrac{5}{36}\cdot\frac{1}{\frac{61}{216}} \\
&= \tfrac{5}{36}\cdot\tfrac{216}{61} \\
&= \tfrac{30}{61}
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass A gewinnt, liegt also bei $\frac{30}{61}$.

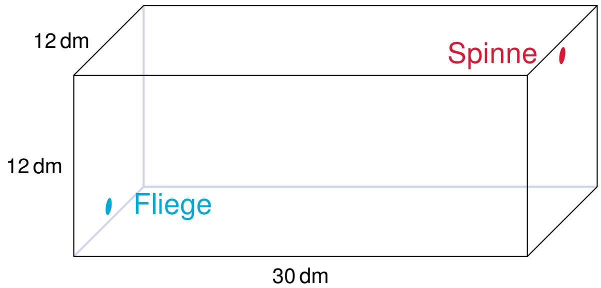
d) Mit den abgeänderten Spielregeln gilt:

$$\begin{aligned}
p(A\text{ gewinnt}) &= \tfrac{1}{6} + \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{36} + \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)\cdot\tfrac{5}{36} + \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^2\cdot\tfrac{5}{36} + \cdots \\
&= \tfrac{1}{6} + \tfrac{125}{1296}\cdot\left(1 + \left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^1 + \left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^2 + \left(\tfrac{31}{36}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^3 + \cdots\right) \\
&= \tfrac{1}{6} + \lim_{n\to\infty} \tfrac{125}{1296}\cdot\left(\left(\tfrac{155}{216}\right)^0 + \left(\tfrac{155}{216}\right)^1 + \left(\tfrac{155}{216}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{155}{216}\right)^n\right) \\
&\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \tfrac{1}{6} + \lim_{n\to\infty} \tfrac{125}{1296}\cdot\frac{1-\left(\frac{155}{216}\right)^{n+1}}{1-\frac{155}{216}} \\
&= \tfrac{1}{6} + \tfrac{125}{1296}\cdot\tfrac{216}{61} \\
&= \tfrac{1}{6} + \tfrac{125}{366} \\
&= \tfrac{186}{366} \\
&= \tfrac{31}{61}
\end{aligned}$$

Nun hat A bessere Gewinnchancen als B.

Aufgabe 7: Spinne - Fliege - Honig

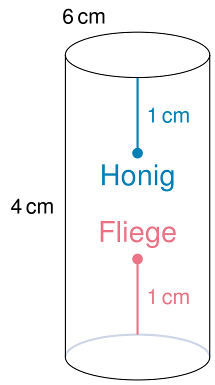
a) Ein Quader hat eine quadratische Grundfläche der Kantenlänge 12 dm. Er ist 30 dm lang. In der Mitte der linken quadratischen Grundfläche, 1 dm über dem Boden, sitzt eine Fliege. Gegenüber sitzt, ebenfalls in der Mitte auf der quadratischen Grundfläche, aber 1 dm unter der Oberseite, eine Spinne.



Wie groß ist die kürzeste Strecke von der Spinne zur Fliege, die über die Quaderfläche führt?

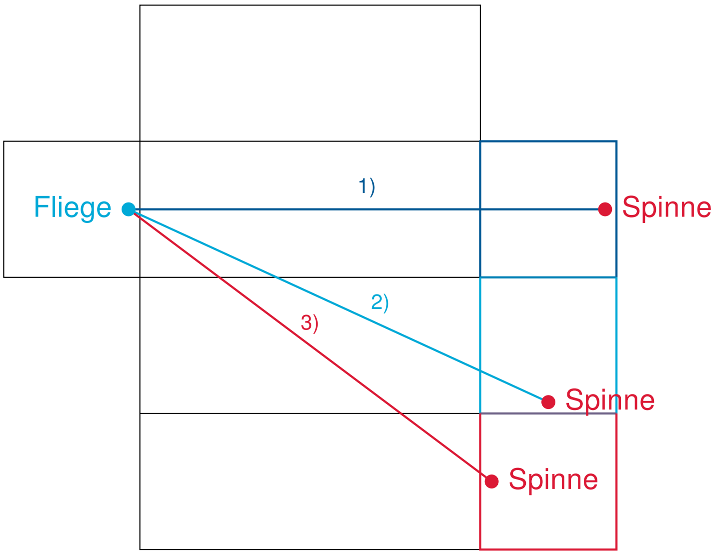
b) Ein oben offenes zylindrisches Gefäß ist 4 cm hoch und hat einen Umfang von 6 cm. 1 cm über dem Boden auf der Innenseite befindet sich eine Fliege. Auf der Außenseite genau gegenüber, 1 cm unter der Oberseite, ist ein Tropfen Honig.

Berechnen Sie den kürzesten Weg, den die Fliege auf der Zylinderfläche zum Honigtropfen zurücklegen muss.



Lösung

a) Wir betrachten das Netz des Körpers und berechnen so die drei denkbaren Weglängen:



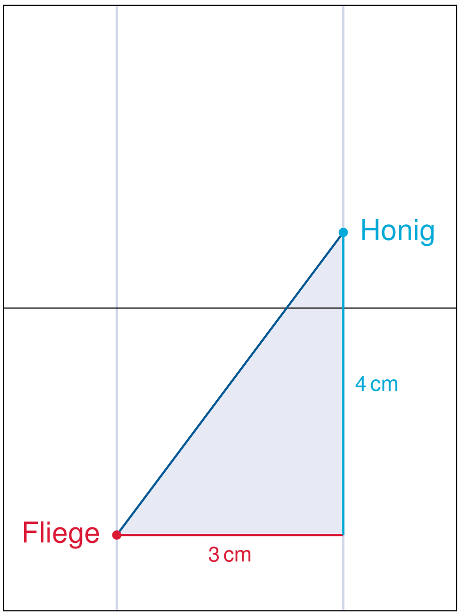
1) $1\,\text{cm} + 30\,\text{cm} + 11\,\text{cm} = 42\,\text{cm}$.

2) $\sqrt{(1\,\text{cm} + 30\,\text{cm} + 6\,\text{cm})^2 + (6\,\text{cm} + 11\,\text{cm})^2} \approx 40.72\,\text{cm}$.

3) $\sqrt{(1\,\text{cm} + 30\,\text{cm} + 1\,\text{cm})^2 + (6\,\text{cm} + 12\,\text{cm} + 6\,\text{cm})^2} = 40\,\text{cm}$.

Strecke 3) ist am kürzesten. Die Spinne muss also 40 cm zurücklegen.

b) Wir betrachten den abgerollten Zylindermantel. Zur Darstellung der Außenseite wird der Zylindermantel nach oben fortgesetzt.

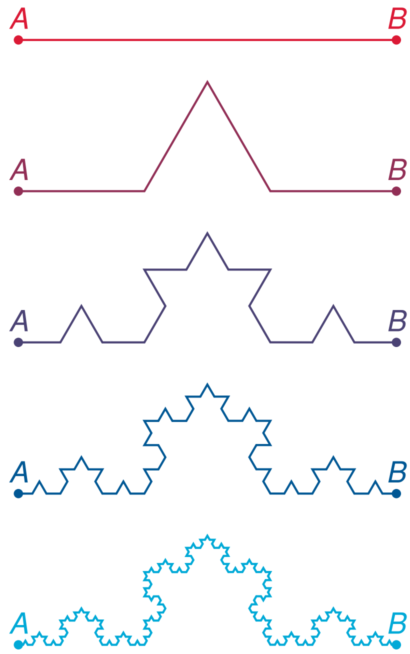


Es ergibt sich eine Entfernung von

$$\sqrt{(3\,\text{cm})^2 + (4\,\text{cm})^2} = 5\,\text{cm}.$$

Aufgabe 8: Von-Koch-Kurve

Ausgehend von einer Strecke $\overline{AB}$, welche der Einfachheit wegen die Länge $l_0 = 1$ habe, erzeugt man neue Streckenzüge, indem man über dem mittleren Streckendrittel ein gleichseitiges Dreieck errichtet und dann dieses Drittel wegnimmt. Beim nächsten Schritt wird dieses Verfahren auf die vier Teilstrecken angewandt.



a) Berechnen Sie die jeweilige Länge s_n der einzelnen Teilstrecken der nach 3, 4 und 5 Schritten entstandenen Figur ($n \in \{3,4,5\}$).

b) Berechnen Sie die Länge l_n des gesamten Streckenzuges nach 3, 4 und 5 Schritten ($n \in \{3,4,5\}$). Wie verhält sich die Gesamtlänge l_n, wenn man den Prozess immer weiter fortsetzt?

c) Nun betrachten wir den Inhalt der Fläche A_n, der über der Strecke $\overline{AB}$ durch l_n eingeschlossen wird. Berechnen Sie A_1, A_2 und A_3. Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn man den Prozess immer weiter fortsetzt?

Hinweis für b) und c): Nutzen Sie hierzu den folgenden Zusammenhang (sog. geometrische Reihe):

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \tfrac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Lösung

a) Es gilt:

$$s_0 = 1 \qquad s_1 = \tfrac{1}{3} \qquad s_2 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 \qquad s_3 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 \qquad s_4 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^4 \qquad s_5 = \left(\tfrac{1}{3}\right)^5$$

b) Es gilt:

$$l_0 = 1 \qquad l_1 = \tfrac{4}{3} \qquad l_2 = \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 \qquad l_3 = \left(\tfrac{4}{3}\right)^3 \qquad l_4 = \left(\tfrac{4}{3}\right)^4 \qquad l_5 = \left(\tfrac{4}{3}\right)^5$$

Aus der Fortsetzung des Prozesses erhält man

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{4}{3}\right)^n = \infty,$$

die Länge des Streckenzuges wird also unendlich groß.

c) Es liegen jeweils gleichseitige Dreiecke vor. Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge a hat die Höhe der Länge $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ und damit den Flächeninhalt $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Die Seitenlänge entspricht s_n aus a). Auf der ersten Stufe kommt 1 Dreieck, auf der zweiten Stufe kommen 4 Dreiecke, der dritten Stufe 16 Dreiecke, der n-ten Stufe 4^{n-1} Dreiecke dazu. Damit ist

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{\sqrt{3}}{36} \\
A_2 &= \tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 4\tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right)^2 \\
A_3 &= \tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 4\tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right)^2 + 4^2\tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\right)^2 \\
A_n &= \tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 4\tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right)^2 + 4^2\tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^3\right)^2 + \cdots + 4^{n-1}\tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^n\right)^2 \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 4 \cdot \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right)^2 + 4^2 \cdot \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right)^3 + \cdots + 4^{n-1} \cdot \left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\right)^n\right] \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[\left(\tfrac{1}{9}\right) + 4 \cdot \left(\tfrac{1}{9}\right)^2 + 4^2 \cdot \left(\tfrac{1}{9}\right)^3 + \cdots + 4^{n-1} \cdot \left(\tfrac{1}{9}\right)^n\right] \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{36} \cdot \left[\left(\tfrac{1}{9}\right)^0 + 4 \cdot \left(\tfrac{1}{9}\right)^1 + 4^2 \cdot \left(\tfrac{1}{9}\right)^2 + \cdots + 4^{n-1} \cdot \left(\tfrac{1}{9}\right)^{n-1}\right] \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{36} \cdot \left[\left(\tfrac{4}{9}\right)^0 + \left(\tfrac{4}{9}\right)^1 + \left(\tfrac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right] \\
&\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \tfrac{\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{1 - \left(\tfrac{4}{9}\right)^n}{\tfrac{5}{9}} \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{36} \cdot \tfrac{9}{5} \cdot \left(1 - \left(\tfrac{4}{9}\right)^n\right) \\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{20} \cdot \left(1 - \left(\tfrac{4}{9}\right)^n\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \tfrac{\sqrt{3}}{20}
\end{aligned}
$$

Die Fläche unter der von-Koch-Kurve ist also endlich.