



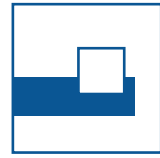
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2026

Hausaufgabenversion

Aufgaben

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Wissenschaftliche Taschenrechner und eine Formelsammlung sind ebenfalls zugelassen.



Aufgabe 1: (Bi-)Quadratische Gleichungen

Berechnen Sie die Lösungsmenge.

- a) $x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 1 = 0$
- b) $(\cos x)^2 + \frac{3}{2}\cos x = 1; x \in [0, 2\pi]$
- c) $(\sin(2x + 1))^2 + \frac{3}{2}\sin(2x + 1) = 1; x \in [0, \pi]$

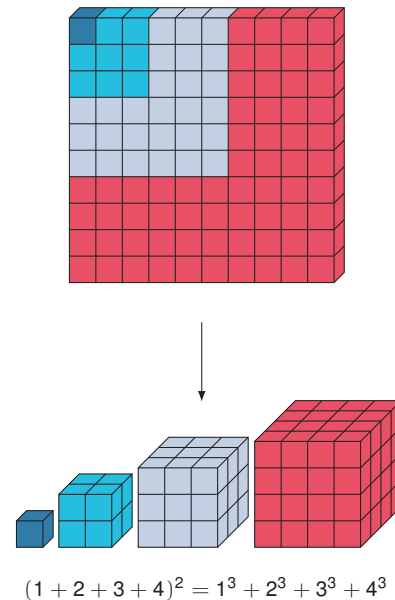
Aufgabe 2: Summe der Kubikzahlen

Die Summe der ersten n Kubikzahlen $s_n := 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3$ lässt sich durch die Formel

$$s_n = \left(\frac{(n+1) \cdot n}{2} \right)^2 = \frac{(n+1)^2 \cdot n^2}{4} = \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2$$

beschreiben.

- a) Berechnen Sie s_1 , s_2 und s_3 und zeigen Sie, dass die Formel für die ersten drei Summen korrekt ist.
- b) Die Abbildung zeigt eine Veranschaulichung der Formel für die Summe der ersten Kubikzahlen.
 - i) Zeigen Sie, dass die Anzahl der gleich gefärbten kleinen Würfel immer einer Kubikzahl entspricht.
 - ii) Erklären Sie die Formel anhand der Abbildung.
- c) Beweisen Sie die Formel für die Summe der ersten n Kubikzahlen mit Hilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion.



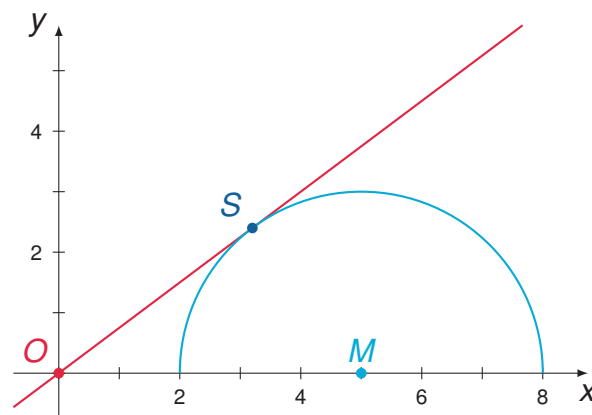


Aufgabe 3: Halbkreis und Gerade

In einem Koordinatensystem befindet sich oberhalb der 1. Achse ein Halbkreis um den Punkt $M = (5 | 0)$ mit Radius $r = 3$. Seine Gleichung ist

$$y = \sqrt{9 - (x - 5)^2}.$$

Dieser Kreis wird von einer Ursprungsgerade im Punkt S berührt.

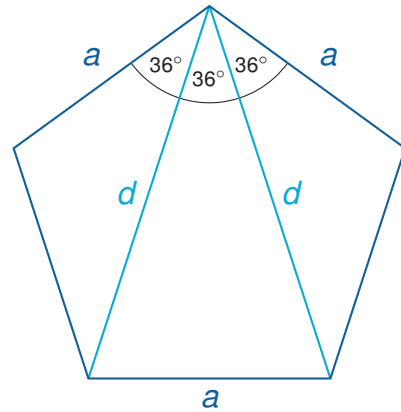


- Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OMS .
- Berechnen Sie die Höhe h des Dreiecks OMS zur Grundseite OM .
- Berechnen Sie die Gleichung der Ursprungsgerade.
- Berechnen Sie die Steigung an jedem beliebigen Punkt $(x_0 | y_0)$ des Halbkreises um M und untersuchen Sie, wie sich die Steigung verhält, wenn sich x_0 (von rechts) dem Wert 2 annähert.

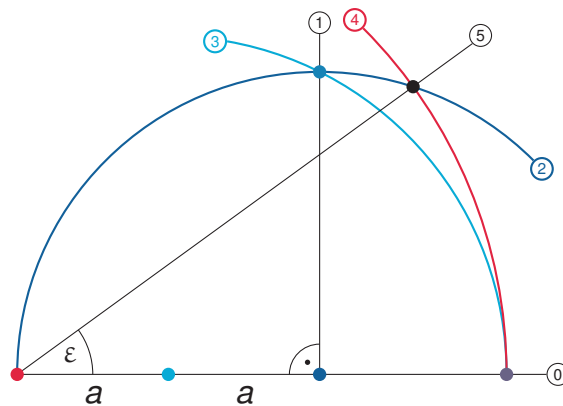
Aufgabe 4: Goldener Schnitt

Der Goldene Schnitt τ entspricht dem Verhältnis $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Er entspricht dem Seitenverhältnis der Länge der Diagonalen d zur Seitenlänge a im regelmäßigen Fünfeck. Errichtet man ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkeln der Länge a und einer Basis der Länge d , so beträgt der Basiswinkel $\alpha = 36^\circ$.

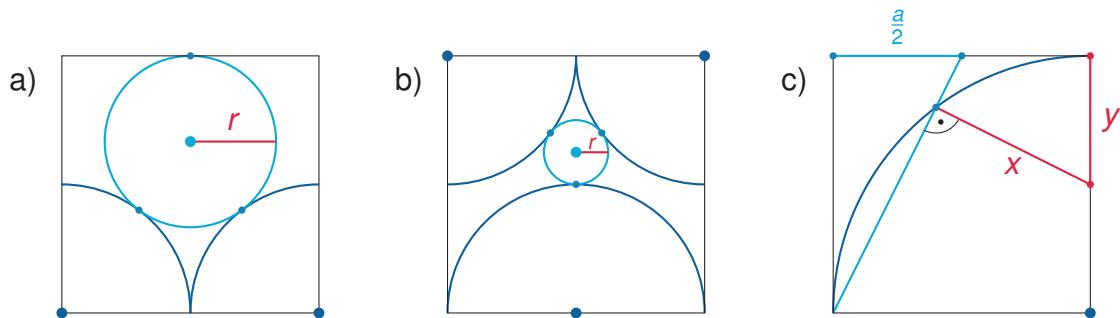


- Erklären Sie, warum der Winkel α gerade 36° beträgt.
- Zeigen Sie, dass im regelmäßigen Fünfeck das Verhältnis von Diagonale zu Seitenlänge dem Goldenen Schnitt τ entspricht.
- Zeigen Sie, dass in der Figur der Winkel ε ebenfalls 36° beträgt.



Aufgabe 5: Pythagoras im Quadrat

Das Quadrat hat jeweils Seitenlänge a . Berechnen Sie die Größen r , x und y .



Hinweis zu c): Fügen Sie ein weiteres Quadrat rechts an und ergänzen Sie die Skizze.

Aufgabe 6: Gewinnwahrscheinlichkeit bei Würfeln (nach Huygens)

Die Spieler A und B würfeln abwechselnd mit zwei idealen Würfeln gleichzeitig. Spieler A beginnt. Er gewinnt, wenn A die Augensumme 6 erzielt, B gewinnt dagegen, wenn B die Augensumme 7 würfelt. Das Spiel endet, wenn einer der beiden Spieler gewonnen hat.

- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln die Augensumme 6 bzw. 7 zu erzielen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass A in der vierten Runde gewinnt bzw. dass B in der vierten Runde gewinnt.
- Berechnen Sie die Gesamtgewinnwahrscheinlichkeit von A .

Hinweis: Nutzen Sie hierzu den folgenden Zusammenhang (sog. geometrische Reihe):

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- Um die Gewinnwahrscheinlichkeit von A zu verbessern, darf A ausnahmsweise beim ersten Wurf mit nur einem Würfel würfeln. Er gewinnt, wenn er die Augenzahl 6 erzielt. Dann geht das Spiel wie bisher weiter. Berechnen Sie nun die Gewinnwahrscheinlichkeit von A .

Aufgabe 7: Spinne - Fliege - Honig

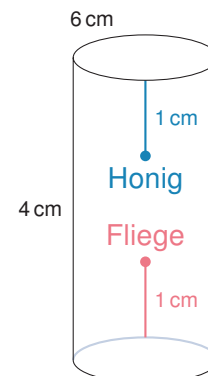
- a) Ein Quader hat eine quadratische Grundfläche der Kantenlänge 12 dm. Er ist 30 dm lang. In der Mitte der linken quadratischen Grundfläche, 1 dm über dem Boden, sitzt eine Fliege. Gegenüber sitzt, ebenfalls in der Mitte auf der quadratischen Grundfläche, aber 1 dm unter der Oberseite, eine Spinne.

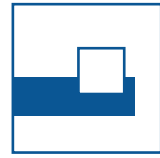


Wie groß ist die kürzeste Strecke von der Spinne zur Fliege, die über die Quaderfläche führt?

- b) Ein oben offenes zylindrisches Gefäß ist 4 cm hoch und hat einen Umfang von 6 cm. 1 cm über dem Boden auf der Innenseite befindet sich eine Fliege. Auf der Außenseite genau gegenüber, 1 cm unter der Oberseite, ist ein Tropfen Honig.

Berechnen Sie den kürzesten Weg, den die Fliege auf der Zylinderfläche zum Honigtropfen zurücklegen muss.





Aufgabe 8: Von-Koch-Kurve

Ausgehend von einer Strecke $\overline{AB}$, welche der Einfachheit wegen die Länge $l_0 = 1$ habe, erzeugt man neue Streckenzüge, indem man über dem mittleren Streckendrittel ein gleichseitiges Dreieck errichtet und dann dieses Drittel wegnimmt. Beim nächsten Schritt wird dieses Verfahren auf die vier Teilstrecken angewandt.

- Berechnen Sie die jeweilige Länge s_n der einzelnen Teilstrecken der nach 3, 4 und 5 Schritten entstandenen Figur ($n \in \{3, 4, 5\}$).
- Berechnen Sie die Länge l_n des gesamten Streckenzuges nach 3, 4 und 5 Schritten ($n \in \{3, 4, 5\}$). Wie verhält sich die Gesamtlänge l_n , wenn man den Prozess immer weiter fortsetzt?
- Nun betrachten wir den Inhalt der Fläche A_n , der über der Strecke $\overline{AB}$ durch l_n eingeschlossen wird. Berechnen Sie A_1 , A_2 und A_3 . Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn man den Prozess immer weiter fortsetzt?

Hinweis für b) und c): Nutzen Sie hierzu den folgenden Zusammenhang (sog. geometrische Reihe):

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

