



# Tag der Mathematik 2025

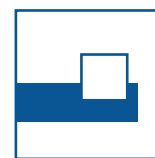
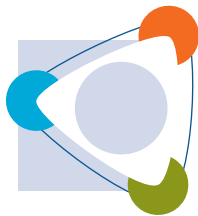
Gruppenwettbewerb  
Einzelwettbewerb  
Mathematische Hürden

## Aufgaben

Allgemeine Hinweise:

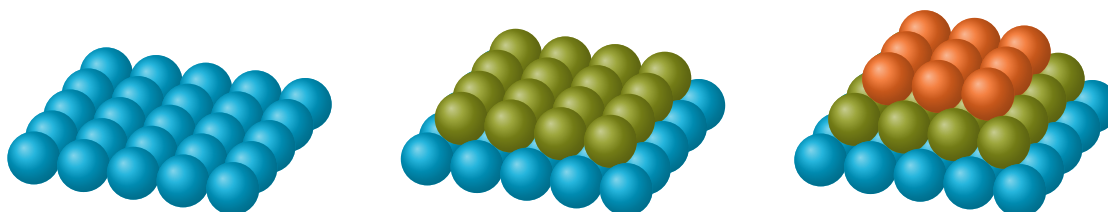
Als Hilfsmittel dürfen nur Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden.  
Taschenrechner sind nicht zugelassen.

**Aufgaben bitte nur auf den Aufgabenblättern bearbeiten und abgeben!**



### Aufgabe G1

Kugeln werden auf dem Tisch zu einem quadratischen Muster (blau) ausgelegt. Eine zweite Schicht (grün) legt man versetzt darüber und verfährt analog für jede weitere Schicht.



Wenn das Startquadrat aus  $n \times n$  Kugeln besteht, besteht die  $n$ -te Schicht aus einer Kugel und wir erhalten eine Pyramide.

Sei  $Q(n)$  die Anzahl der Kugeln in solch einer Pyramide.

- a) Bestimmen Sie  $Q(n)$  für  $n = 1, 2, 3, 4$  und finden Sie eine Rekursionsformel für  $Q(n)$ .

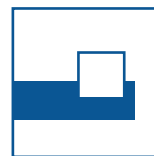
(Hinweis: Eine Rekursionsformel zeigt, wie man  $Q(n)$  aus  $Q(n-1)$  erhält.)

- b) Finden Sie Zahlen  $p, q, r$ , sodass für  $n = 1, 2, 3, 4$  gilt:

$$Q(n) = pn^3 + qn^2 + rn.$$

- c) Tatsächlich gilt die in Aufgabenteil b) genannte Formel für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

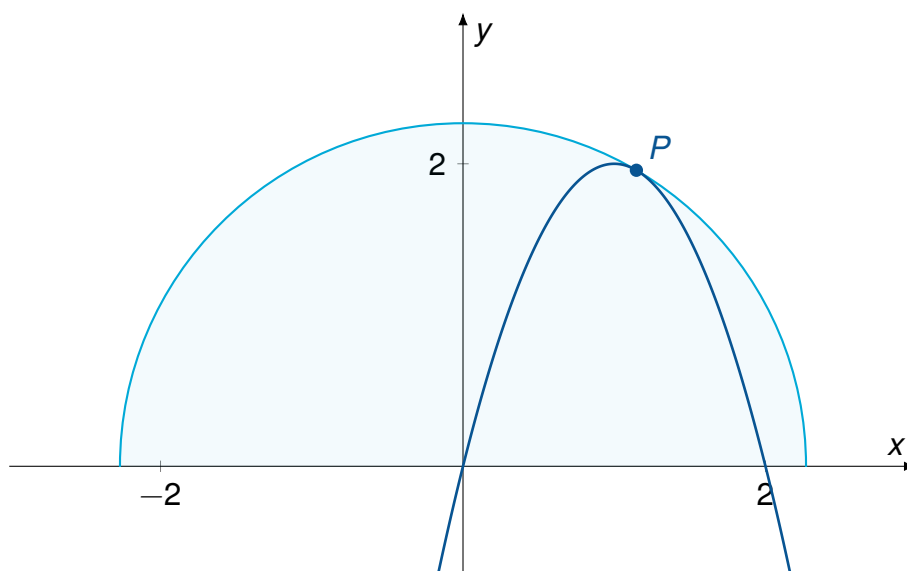
Zeigen Sie: Wenn die Formel  $Q(n)$  aus b) für eine natürliche Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gilt, dann gilt auch  $Q(n+1)$  für den Nachfolger  $n+1$ .



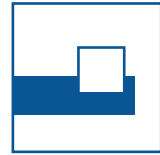
### Aufgabe G2

Im Bild ist eine auf nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen  $x = 0$ ,  $x = 2$  und dem Maximalwert  $y_{\max} = 2$  dargestellt.

Sie berührt einen Halbkreis  $K$  um den Ursprung oberhalb der  $x$ -Achse von innen im Punkt  $P$ .

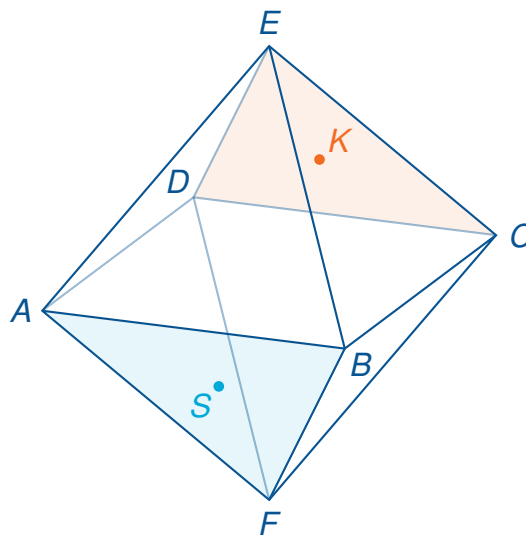


Berechnen Sie die  $x$ -Koordinate von  $P$ .



### Aufgabe G3

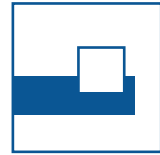
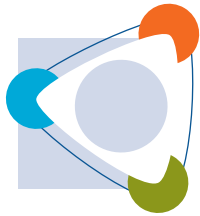
Eine Spinne  $S$  sitzt außen auf einem durchsichtigen Oktaeder mit Kantenlänge 1, genau in der Mitte (Höhenschnittpunkt) der Dreiecksfläche  $\triangle ABF$ . Auf der gegenüberliegenden Dreiecksfläche  $\triangle CDE$  (ebenfalls genau in der Mitte) entdeckt sie einen Käfer  $K$  als potentielle Beute.



Wie lang ist der kürzeste Weg von der Spinne zur Beute entlang der Oktaeder-  
oberfläche?

(Hinweis 1: Im gleichseitigen Dreieck sind die Höhen auch Seitenhalbierende und teilen sich im Verhältnis 2:1.)

(Hinweis 2: Zeichnen Sie ein geeignetes Oktaedernetz.)



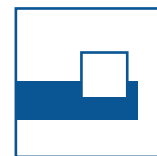
### Aufgabe G4

Für die vierstellige Zahl 6255 gilt: Addiert man zu der Zahl die Zahl, die man erhält, wenn man die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge notiert, dann ist das Ergebnis durch 11 teilbar.

Es gilt nämlich:

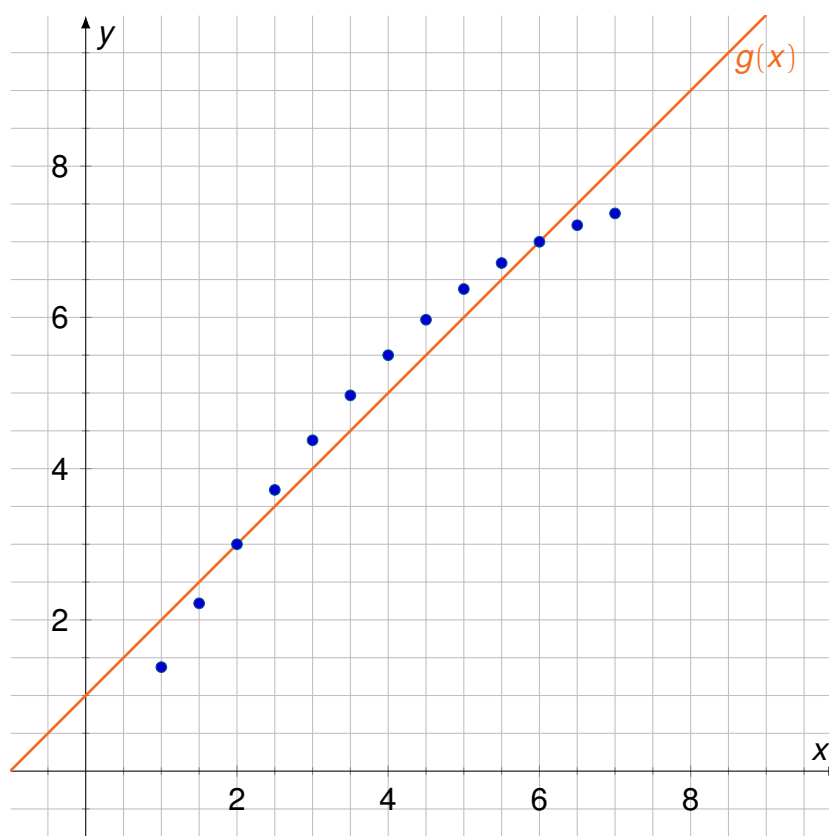
$$6255 + 5526 = 11781 = 11 \cdot 1071$$

- Zeigen Sie, dass dies für **jede** vierstellige Zahl  $Z$  gilt.
- Gilt die Aussage auch für **jede** fünfstellige Zahl? (mit Begründung)



### Aufgabe E1

Die Messdaten (blaue Punkte) wurden durch eine lineare Modellfunktion  $g(x)$  approximiert (orangefarbene Gerade).



Zur Verbesserung des Modells soll nun eine Parabel  $p$  genauer an die Daten angepasst werden.

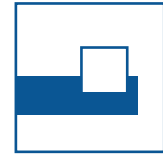
Geben Sie eine solche Parabel an.

(Hinweis: Nutzen Sie eine Darstellung von  $p$ , bei der die Parameter aus der Abbildung möglichst gut abgelesen werden können.)



## Tag der Mathematik 2025

### Aufgabe E2



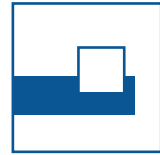
#### Aufgabe E2

Achilles befestigt das linke Ende eines Gummibandes an einer Wand, das rechte Ende behält er in der Hand und spannt das Band auf eine Länge von 3 Metern.

Er beobachtet eine Ameise, die am linken Bandende startend mit einer Geschwindigkeit von einem Meter pro Minute auf ihn zu krabbelt.

Nach jeder Minute tritt Achilles einen Schritt zurück, wodurch das Band schlagartig um jeweils einen Meter gleichmäßig verlängert wird.

Welche Zeit (Angabe in Minuten und Sekunden) braucht die Ameise vom Start bis zum Erreichen von Achilles?

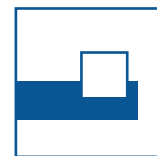


### Aufgabe E3

Anton und Berta werfen eine faire Münze, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit Kopf oder Zahl zeigt. Anton gewinnt, wenn zuerst zehnmal Kopf erscheint, während Berta gewinnt, wenn zuerst zehnmal Zahl geworfen wird.

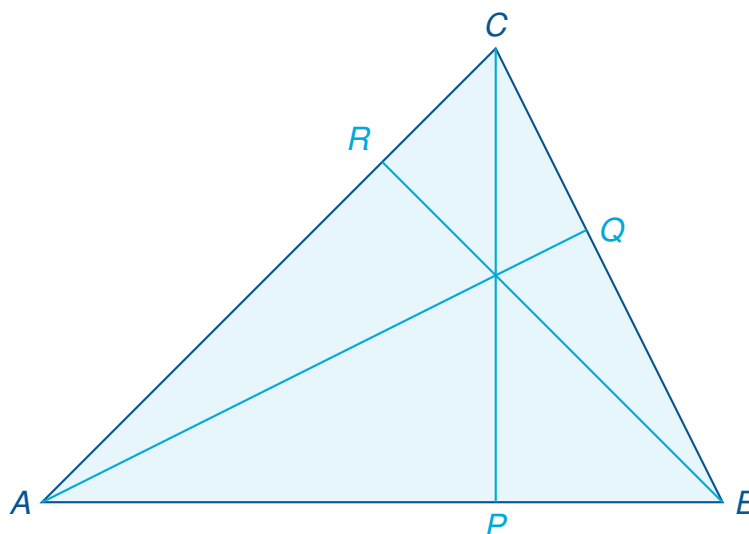
- Nach 14 Würfeln steht es 9:5 für Berta, das heißt, es wurde schon 9 mal Zahl, aber erst 5 mal Kopf geworfen. Wie groß ist die Chance, dass Berta am Ende gewinnt?
- Wie groß ist die Chance für Berta, wenn es nach 12 Würfeln 8:4 für Berta steht?



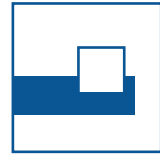
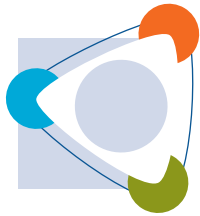


### Aufgabe E4

Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck mit Ecken  $A, B, C$  und Höhenfußpunkten  $P, Q, R$ . Bekannt sei, dass der Abstand von  $P$  zu  $C$  gleich dem Abstand von  $P$  zu  $A$  und doppelt so groß wie der Abstand von  $P$  zu  $B$  ist.

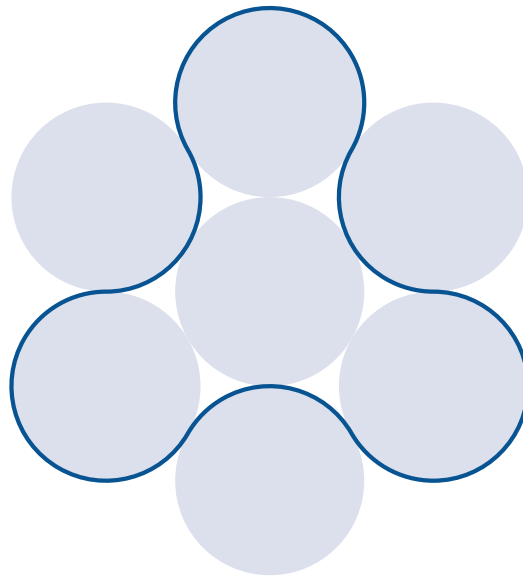


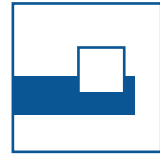
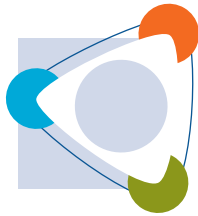
Zeigen Sie, dass der Abstand von  $Q$  zu  $A$  das Dreifache des Abstandes von  $Q$  zu  $C$  ist.



### Aufgabe H1

Die sieben Kreise der Rosette haben alle einen Radius von zehn Zentimetern.  
Wie lang ist die blaue Linie?





### Aufgabe H2



Auf einem Spielbrett, das nur eine Reihe mit 7 Feldern hat, liegen 3 orangefarbene Spielsteine (links) und 3 blaue Spielsteine (rechts) wie abgebildet.

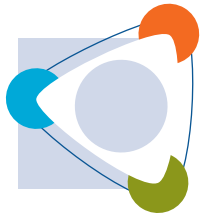
Die orangefarbenen und die blauen Steine sollen nun durch bestimmte Züge die Plätze tauschen. Dabei sind nur zwei Arten von Zügen erlaubt:

1. Das Verschieben eines Steins auf ein direkt benachbartes freies Feld.
2. Das Springen über einen einzelnen **andersfarbigen** Stein auf das direkt dahinter liegende freie Feld.

Außerdem dürfen die orangefarbenen Steine nur nach rechts und die blauen Steine nur nach links ziehen oder springen.

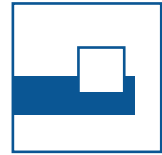
Wie viele Züge werden dabei benötigt? Die Züge müssen nicht angegeben werden.

(Es darf verwendet werden, dass die Aufgabe lösbar ist.)



## Tag der Mathematik 2025

### Aufgabe H3

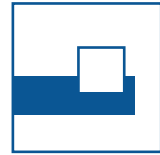
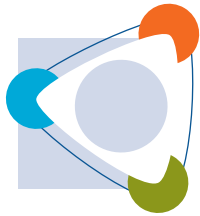


#### Aufgabe H3

Wie lautet die Einerstelle der Zahl:

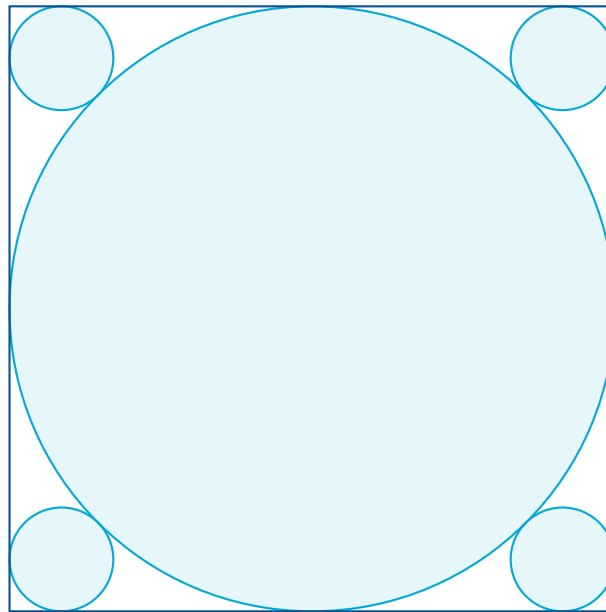
$$Z = 1! + 2! + 3! + \dots + 2025!$$

Dabei bedeutet  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  das Produkt aller Zahlen von 1 bis  $n$ .



**Aufgabe H4**

In ein Quadrat mit Seitenlänge 2 ist ein großer Kreis einbeschrieben und in die 4 Ecken jeweils ein kleinerer Kreis, der den großen Kreis und das Quadrat berührt.

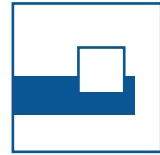


Wie groß ist der Radius der kleinen Kreise?



## Tag der Mathematik 2025

### Aufgabe H5

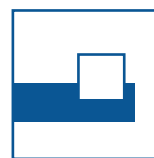


---

#### Aufgabe H5

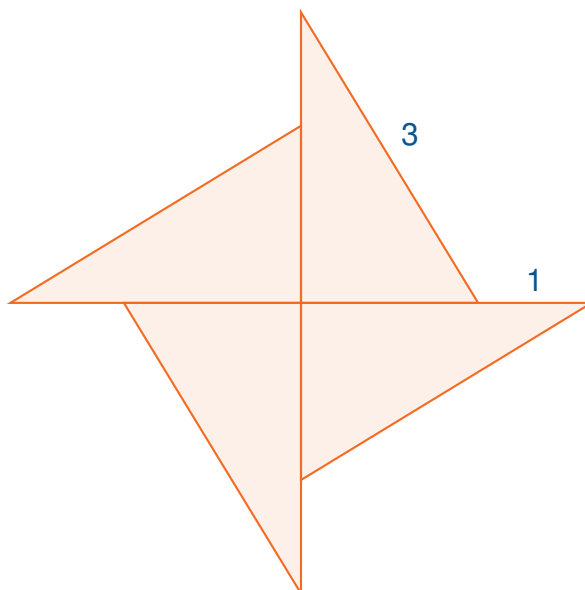
Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, bei denen mindestens zwei benachbarte Ziffern übereinstimmen?

(Hinweis: Es genügt die Angabe des Lösungsterms.)

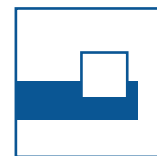


**Aufgabe H6**

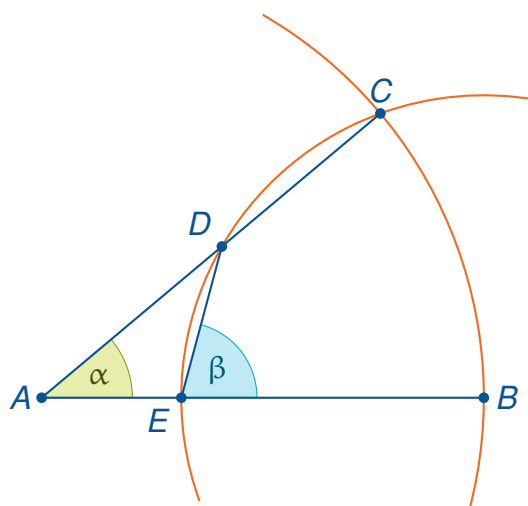
Ein Stern, dessen Seiten die Längen 1 und 3 haben, ist aus vier gleichen rechtwinkligen Dreiecken (wie im Bild) zusammengesetzt.



Wie groß ist die Fläche jedes dieser Dreiecke?



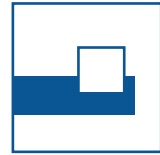
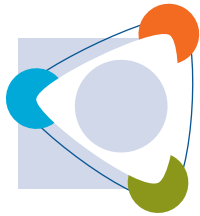
**Aufgabe H7**



In der Skizze liegen  $B$  und  $C$  auf einem Kreis um  $A$ .  $C$ ,  $D$ , und  $E$  liegen auf einem Kreis um  $B$ .

Wie groß ist der Winkel  $\alpha$ , wenn  $\beta = 75^\circ$  ist?





**Aufgabe H8**

Es sei gegeben:

$$1 + 2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \sqrt{1 + \dots}}} = x$$

Bestimmen Sie  $x$ .