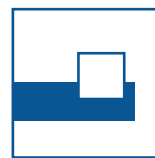




Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2025

Klausurversion

Aufgaben mit Lösungen



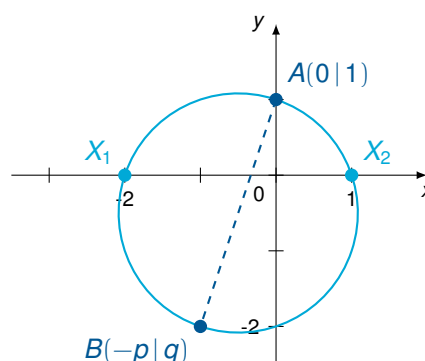
Aufgabe 1: pq-Formel geometrisch

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann man geometrisch folgendermaßen lösen: In einem Koordinatensystem zeichnet man die Punkte $A(0|1)$ und $B(-p|q)$. Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ schneidet die x -Achse in $X_1(x_1|0)$ und $X_2(x_2|0)$ (siehe Abbildung).

- a) Überprüfen Sie das Verfahren durch rechnerisches und geometrisches Lösen der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$.

- b) Zeigen Sie, dass allgemein gilt: x_1 ist Lösung der quadratischen Gleichung.

Hinweis: Pythagoras für $\triangle ABX_1$, verwenden Sie nur p , q und x_1 .



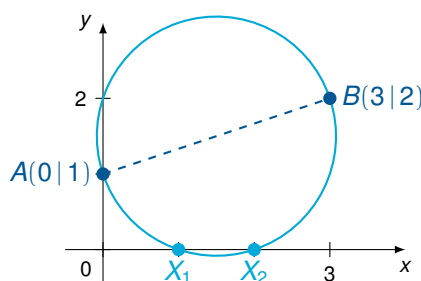
Lösung

- a) Aus $x^2 - 3x + 2 = 0$ ergeben sich $p = -3$ und $q = 2$. Nach pq-Formel gilt also

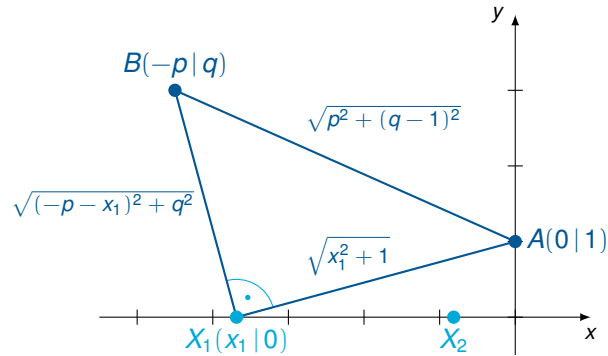
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und damit $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

Geometrisch:



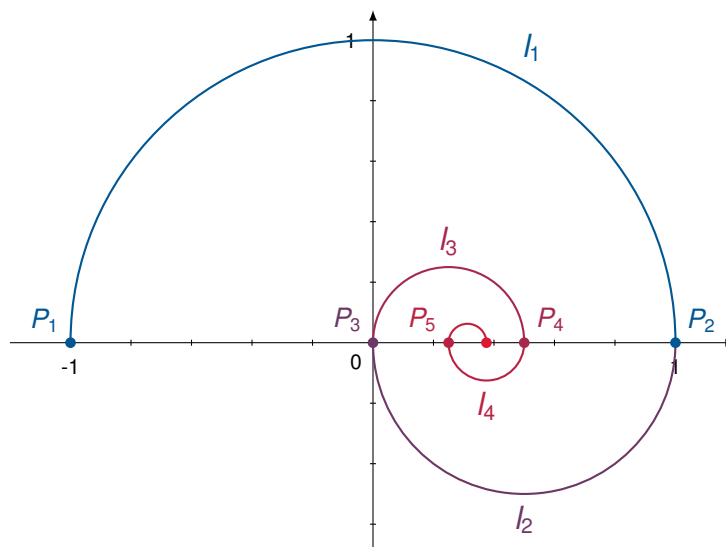
- b) Es gilt im Dreieck $\triangle ABX_1$:



$$\begin{aligned}
 & p^2 + (q-1)^2 = (-p-x_1)^2 + q^2 + x_1^2 + 1 \\
 \Leftrightarrow & p^2 + q^2 - 2q + 1 = p^2 + 2px_1 + x_1^2 + q^2 + x_1^2 + 1 \\
 \Leftrightarrow & -2q = 2px_1 + 2x_1^2 \\
 \Leftrightarrow & 2x_1^2 + 2px_1 + 2q = 0 \\
 \Leftrightarrow & x_1^2 + px_1 + q = 0
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Spirale aus Halbkreisen

In der Abbildung wird durch Zusammensetzen von Halbkreisen mit den Radien $r_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ für $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ eine Spirale erzeugt.



- a) l_i sind die Längen der Halbkreisbögen (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Längen l_1 , l_2 und l_3 , der Halbkreisbögen. Wird mit unbeschränkt wachsendem n die Spiralenlänge beliebig groß oder gibt es einen Grenzwert für



die Summe aller Längen

$$L_n = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n = \sum_{i=1}^n l_i.$$

- b) Bestimmen Sie die den Punkten $P_n(x_n|0)$ entsprechenden Zahlen x_n . Zeigen Sie, dass diese Punkte mit wachsendem n gegen einen Grenzwert streben.

Hinweis: Betrachten Sie getrennt die geraden oder ungeraden Glieder der Zahlenfolge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$; die Lösung für nur eine Teilfolge genügt.

Hinweis: $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$

Lösung

- a) Es gilt

$$\begin{array}{ll} r_1 = 1 & l_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r_1 = \pi \\ r_2 = \frac{1}{2} & l_2 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \\ r_3 = \frac{1}{4} & l_3 = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r_3 = \frac{1}{4} \cdot \pi \\ \vdots & \vdots \\ r_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} & l_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \cdot \pi \end{array}$$

Daraus ergibt sich für die Summe L_n der Längen

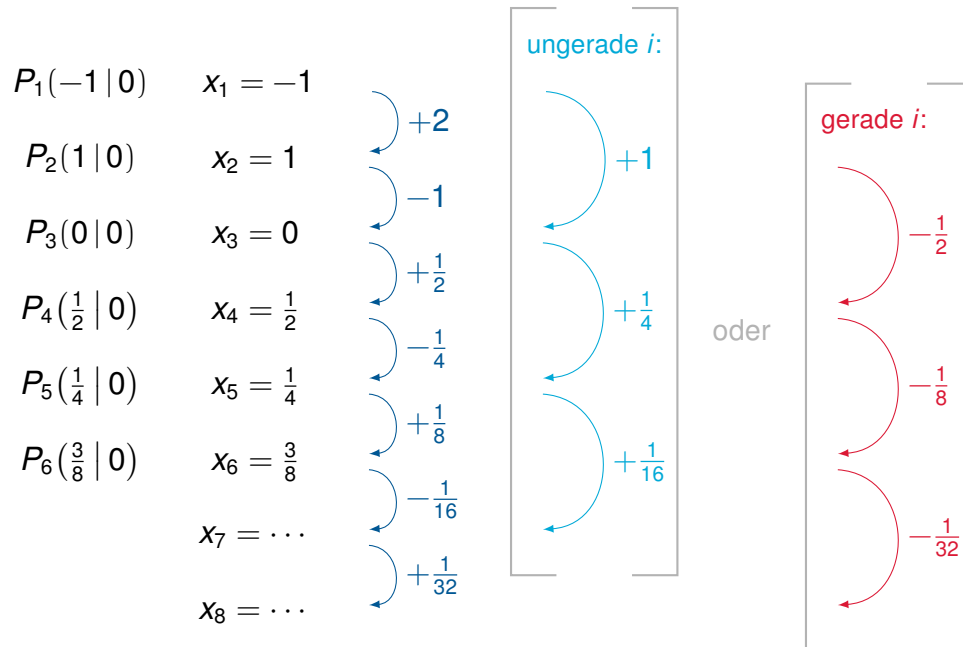
$$\begin{aligned} L_n &= l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n \\ &= \pi \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ &= \pi \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2\pi \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Strebt n gegen unendlich, ergeben sich die Grenzwerte

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad L_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi.$$



b)



Für ungerade $i = 2n + 1$ gilt

$$\begin{aligned}x_{2n+1} &= -1 + \left(\left(\frac{1}{4} \right)^0 + \left(\frac{1}{4} \right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right) \\&= -1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{\frac{3}{4}} \\&= -1 + \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Alternativ die Berechnung für gerade $i = 2n$:

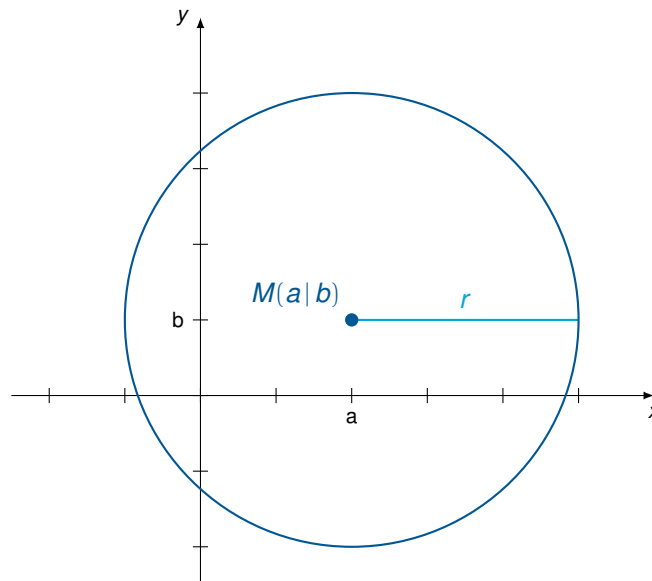
$$\begin{aligned}x_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^0 + \left(\frac{1}{4} \right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2} \right) \\&= 1 - \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}}{\frac{3}{4}} \\&= 1 - \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Sollten beide Fälle berechnet worden sein, gibt es dennoch nur zwei Punkte für die Rechnung.



Aufgabe 3: Quadratische Gleichungssysteme und Kreise

Die Gleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ beschreibt im Koordinatensystem einen Kreis um $M(a|b)$ mit Radius r .

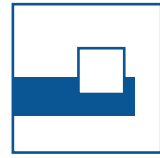


- a) Zeichnen Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Kreise zu

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 \quad \text{und} \quad (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

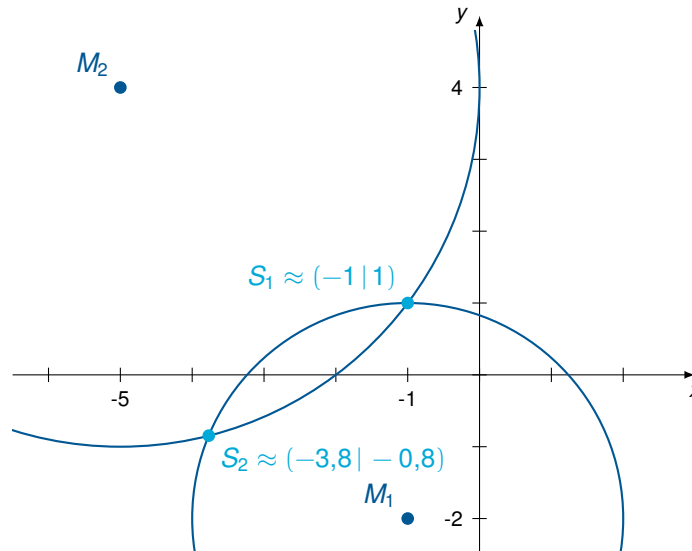
und bestimmen Sie die Schnittpunkte.

- b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte rechnerisch, indem Sie das System der beiden nichtlinearen Gleichungen lösen.



Lösung

a)



b)

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad (1)$$

$$(x+5)^2 + (y-4)^2 = 25 \quad (2)$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 9 \quad (1)$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 = 25 \quad (2)$$

$$8x + 24 - 12y + 12 = 16 \quad (3)=(2)-(1)$$

$$8x - 12y = -20 \quad (4)=(3)-36$$

$$x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}y \quad (5)=((4)+12y)/8$$

$$\left(-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}y\right)^2 + (y+2)^2 = 9 \quad (6)=(5) \text{ in } (1)$$

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{2}y + \frac{9}{4}y^2 + y^2 + 4y + 4 = 9 \quad (6)$$

$$\frac{13}{4}y^2 - \frac{1}{2}y - \frac{11}{4} = 0 \quad (7)=(6)-9$$

$$y^2 - \frac{2}{13}y - \frac{11}{13} = 0 \quad (8)=\frac{4}{13}(7)$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{13} \pm \sqrt{\frac{1}{169} + \frac{11}{13}} \quad (9)=(8)+pq\text{-Formel}$$

$$= \frac{1}{13} \pm \sqrt{\frac{1}{169} + \frac{143}{169}}$$

$$= \frac{1}{13} \pm \frac{12}{13}$$

$$y_1 = 1 \wedge y_2 = -\frac{11}{13}$$

Der x-Wert zu y_1 beträgt $x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1$, der x-Wert zu y_2 beträgt

$$x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{11}{13}\right) = -\frac{5}{2} - \frac{33}{26} = -\frac{98}{26} = -\frac{49}{13} = -3\frac{10}{13}.$$

Die Schnittpunkte sind also $S_1(-1 | 1)$ und $S_2(-3\frac{10}{13} | -\frac{11}{13})$.

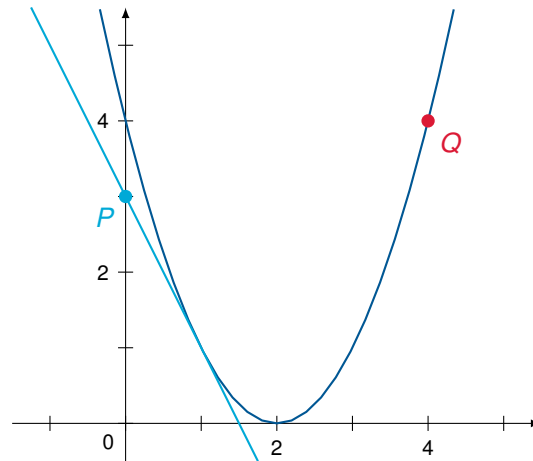


Aufgabe 4: Tangente an Parabel

Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $f(x) = (x - 2)^2$. Nun suchen wir eine Gerade, welche Tangente zur Parabel ist, die Parabel f also nur genau einmal berührt.

- a) Berechnen Sie die Gleichung derjenigen Geraden, die durch $P(0|3)$ geht und die Parabel f unterhalb von P berührt.

- b) Der Punkt $Q(4|4)$ liegt auf der Parabel f . Welche Gerade durch Q ist Tangente an der Parabel f ? Berechnen Sie die Steigung dieser Geraden. Welche Information über die Parabel erhält man auf diese Art?



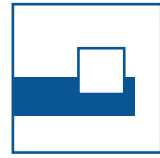
Lösung

- a) Eine Gerade durch den Punkt $P(0|3)$ hat die Form $y = m \cdot x + 3$ mit beliebigem m . Schneidet die Gerade die Parabel f , so gilt für die Schnittpunkte

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= mx + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 &= mx + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 - (4+m)x + 1 &= 0 \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{4+m}{2} \pm \sqrt{\frac{(4+m)^2}{4} - 1}.\end{aligned}$$

Soll die Gerade eine Tangente sein, darf nur ein Schnittpunkt existieren, es muss also gelten

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{(4+m)^2}{4} - 1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(4+m)^2}{4} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (4+m)^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 16 - 8m + m^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 8m + 12 &= 0 \\ \Rightarrow m_{1,2} &= -4 \pm \sqrt{16 - 12} \\ &= -4 \pm 2 \\ \Leftrightarrow m_1 &= -6 \wedge m_2 = -2.\end{aligned}$$



Die weniger steile Tangente mit Steigung $m = -2$ berührt die Parabel unterhalb von Punkt P .

b) Für eine allgemeine Gerade $y = m \cdot x + b$ durch den Punkt $Q(4 | 4)$ muss

$$4 = 4m + b \quad \text{bzw.} \quad b = 4 - 4m$$

gelten. Die Gerade hat also die Form $y = mx + 4 - 4m$ mit beliebigem m . Schneidet die Gerade die Parabel f , so gilt für die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} (x - 2)^2 &= mx + 4 - 4m \\ \Leftrightarrow x^2 - (4 + m)x + 4m &= 0 \\ \Rightarrow x_{1,2} &= \frac{4+m}{2} \pm \sqrt{\frac{(4+m)^2}{4} - \frac{16m}{4}}. \end{aligned}$$

Auch hier gilt, soll die Gerade eine Tangente sein, darf nur ein Schnittpunkt existieren, es muss also wieder die Diskriminante gleich 0 gesetzt werden

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{(4+m)^2}{4} - \frac{16m}{4}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(4+m)^2}{4} - \frac{16m}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow 16 - 8m + m^2 - 16m &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2 - 8m + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow (m - 4)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= 4. \end{aligned}$$

Die Steigung der Tangente durch Q beträgt also 4. Das ist auch die Steigung der Parabel f an der Stelle $x = 4$.

Aufgabe 5: Exponentialgleichungen

a) Für welches x gilt: $5^x = \frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{625}}{125}$

b) Für welche y gilt: $5^{2y} + 25 = 26 \cdot 5^y$

Berechnen Sie!



Lösung

a) Es gilt

$$\begin{aligned} 5^x &= \frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{625}}{125} \\ &= \frac{5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{4}{6}}}{5^3} \\ &= \frac{5^1}{5^3} \\ &= 5^{-2} \end{aligned}$$

Woraus sich direkt $x = -2$ ablesen lässt.

b) In der Gleichung $5^{2y} + 25 = 26 \cdot 5^y$ substituieren wir zunächst $z := 5^y$.
Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & z^2 + 25 = 26z \\ \Leftrightarrow & z^2 - 26z + 25 = 0 \\ \Rightarrow & z_{1,2} = 13 \pm \sqrt{169 - 25} \\ & = 13 \pm 12 \\ \Rightarrow & z_1 = 1 \wedge z_2 = 25 \end{aligned}$$

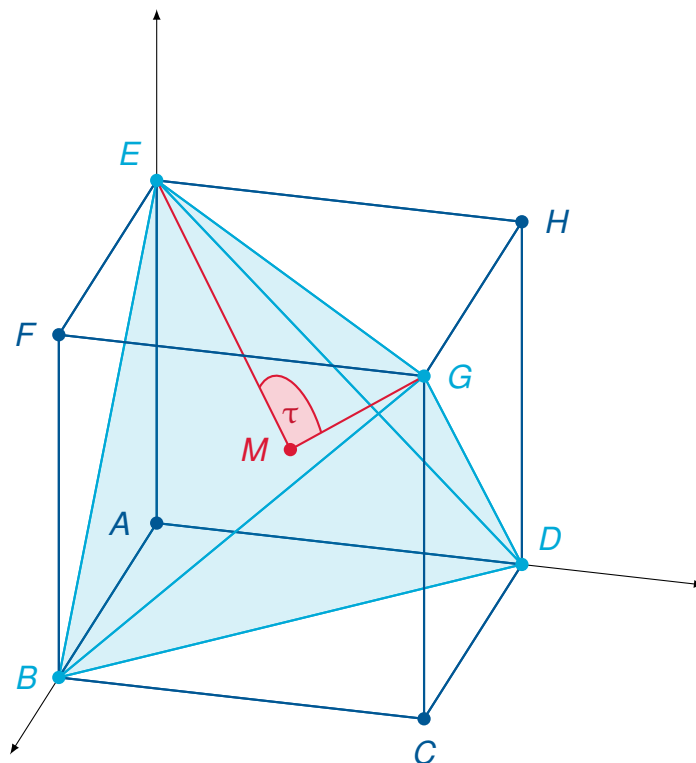
Resubstitution von $z = 5^y$ ergibt

$$\begin{array}{lll} 5^{y_1} = 1 & \wedge & 5^{y_2} = 25 \\ y_1 = 0 & \wedge & y_2 = 2. \end{array}$$

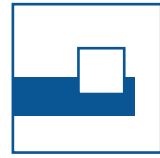


Aufgabe 6: Tetraeder und Tetraederwinkel

Wir denken uns im räumlichen Koordinatensystem einen Würfel $ABCDEFGH$ mit Kantenlänge 1 und dem Mittelpunkt $M(0,5 | 0,5 | 0,5)$. Verbindet man die Eckpunkte B, D, E und G , so erhält man einen Tetraeder.

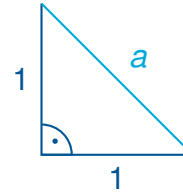


- Berechnen Sie Kantenlänge, Oberflächeninhalt und Volumen des Tetraeders.
- Ermitteln Sie die Länge einer Strecke, die vom Mittelpunkt M zu einem Eckpunkt des Tetraeders führt.
- In der Chemie versteht man unter dem Tetraederwinkel τ den Winkel, der zwischen zwei verschiedenen Strecken liegt, die vom Mittelpunkt zu einem Eckpunkt des Tetraeders verlaufen. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels.



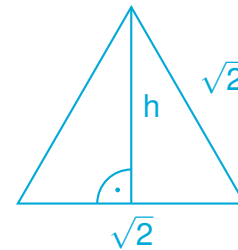
Lösung

- a) Für die Kantenlänge a gilt
 $a^2 = 1^2 + 1^2$, also $a = \sqrt{2}$.



Für den Flächeninhalt eines Außendreiecks berechnen wir zunächst dessen Höhe h . Dabei gilt:

$$\begin{aligned} h^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 &= \sqrt{2}^2 \\ \Leftrightarrow h^2 + \frac{1}{2} &= 2 \\ \Leftrightarrow h^2 &= \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow h &= \sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



Ein Außendreieck hat also die Fläche

$$A_{\Delta} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

und der gesamte Tetraeder den Oberflächeninhalt $O_{\text{Tetr}} = 4A_{\Delta} = 2 \cdot \sqrt{3}$.

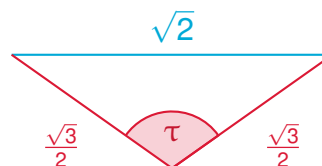
Das Volumen des Tetraeders ergibt sich aus dem Volumen des Würfels minus der vier Außenpyramiden:

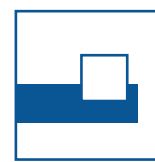
$$V_{\text{Tetr}} = V_{\text{Würfel}} - 4 \cdot V_{\text{Pyr}} = 1 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

- b) Der Abstand zwischen dem Mittelpunkt $M(0,5 | 0,5 | 0,5)$ und einer Ecke, z.B. $(0 | 0 | 0)$ beträgt

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- c) Zur Berechnung des Tetraederwinkels τ nutzen wir den Kosinussatz:

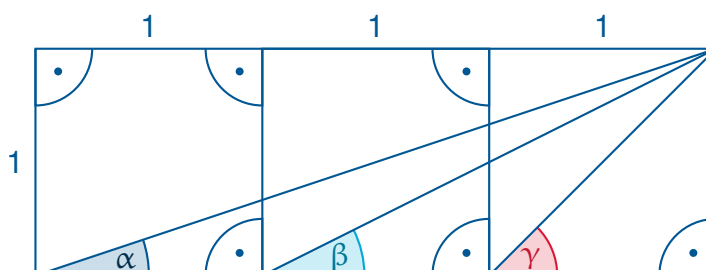




$$\begin{aligned}
 (\sqrt{2})^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \tau \\
 \Leftrightarrow 2 &= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \cdot \cos \tau \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= -\frac{3}{2} \cdot \cos \tau \\
 \Rightarrow \tau &\approx 109,47^\circ
 \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Winkel und Längen in Dreiecken

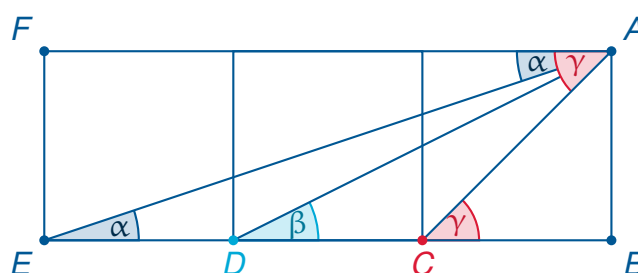
Zeigen Sie: $\alpha + \beta = \gamma$



Lösung

Zur besseren Berechnung geben wir den verschiedenen Eckpunkten Bezeichnungen und betrachten drei zusätzliche Winkel:

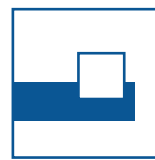
$$\begin{aligned}
 \angle FAC &= \gamma \quad (\text{Wechselwinkel}) \\
 \angle FAE &= \alpha \quad (\text{Wechselwinkel})
 \end{aligned}$$



Es fehlt noch zu zeigen, dass $\angle EAC = \beta$ gilt. Dazu betrachten wir die Dreiecke $\triangle ECA$ und $\triangle DCA$. Diese haben die Seitenlängen:

Dreieck	Lange Seite	Mittlere Seite	Kurze Seite
$\triangle ECA$	$\sqrt{10}$	2	$\sqrt{2}$
$\triangle DCA$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1

Offenbar ist $\triangle ECA$ ähnlich zu $\triangle DCA$, denn die Seitenlängen sind jeweils das $\sqrt{2}$ -fache voneinander. Dann sind auch entsprechende Winkel der beiden Dreiecke gleich. β liegt zwischen der kurzen und langen Seite in $\triangle DCA$, also ist der



zwischen der kurzen und langen Seite von $\triangle ECA$ gelegene Winkel $\sphericalangle EAC$ ebenfalls gleich β .

Daraus folgt $\alpha + \beta = \gamma$.

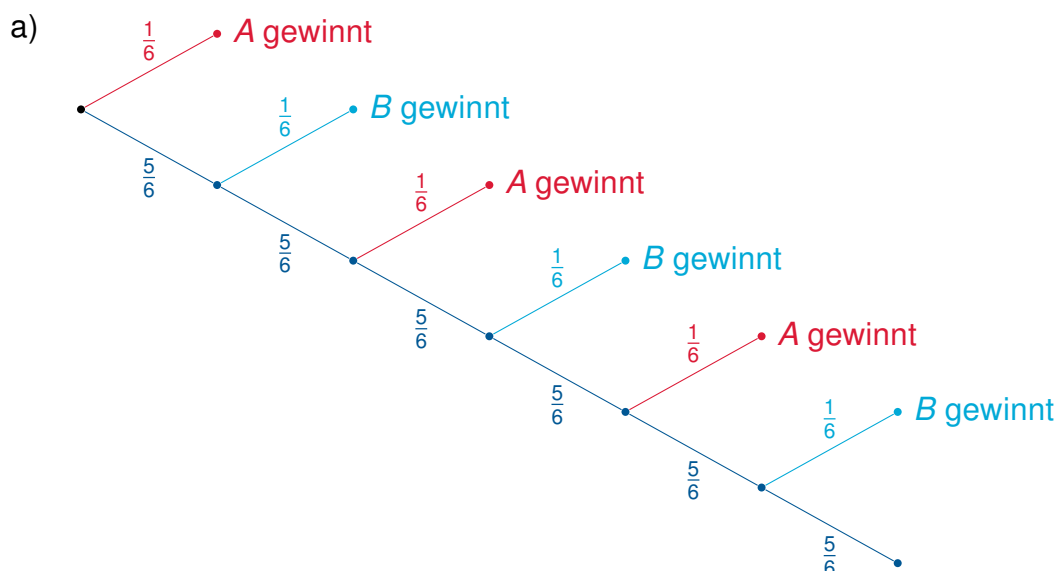
Aufgabe 8: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Alfred und Bernhard spielen ein Würfelspiel. Sie würfeln abwechselnd mit einem gewöhnlichen Würfel. Gewonnen hat derjenige, der eine 6 gewürfelt hat, ansonsten ist der andere wieder mit Würfeln an der Reihe. Alfred würfelt zuerst.

- Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten für Alfred und für Bernhard, wenn nach sechsmaligem Würfeln abgebrochen wird.
- Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten beider Spieler, wenn das Spiel nicht abgebrochen wird.

Hinweis: $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Lösung



Die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn Alfreds ist

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2821}{7776} \approx 36,28\%.$$

Für Bernhard gilt

$$\mathbb{P}(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{2821}{7776} \approx 30,23\%.$$



- b) Wird das Spiel nicht abgebrochen, so ist die Gewinnwahrscheinlichkeit für Alfred

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \left(\frac{25}{36}\right)^1 + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \left(\frac{25}{36}\right)^i \\ &= \frac{1}{6} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \left(\frac{25}{36}\right)^{n+1}}{1 - \frac{25}{36}} \right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{36}{11} \\ &= \frac{6}{11}\end{aligned}$$

und für Bernhard

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}.$$