



Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2025

Klausurversion

Aufgaben

Vorname	Nachname
---------	----------



Vorname

Nachname

Allgemeine Hinweise:

Als Hilfsmittel dürfen Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Wissenschaftliche Taschenrechner und eine Formelsammlung sind ebenfalls zugelassen.

- **Bearbeitungszeit: 90 Minuten**
- **8 Aufgaben, davon 5 zur freien Wahl**
- **Die gewählten Aufgaben müssen in unten stehender Tabelle gekennzeichnet werden. Eine automatische Wertung der besten 5 Aufgaben erfolgt nicht.**

In der zweiten Zeile der Tabelle bitte die fünf gewählten Aufgaben ankreuzen. Die letzte Zeile wird von den Korrektoren ausgefüllt.

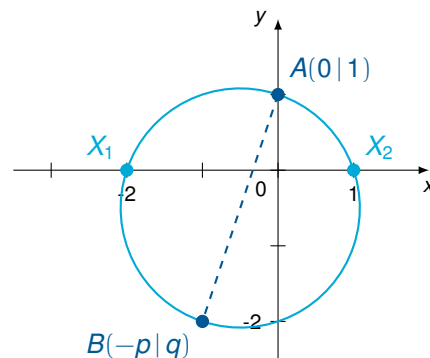
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Gewählt									
Mögliche Punktzahl	10	10	10	10	10	10	10	10	50
Erreichte Punktzahl									

**Aufgabe 1: pq-Formel geometrisch**

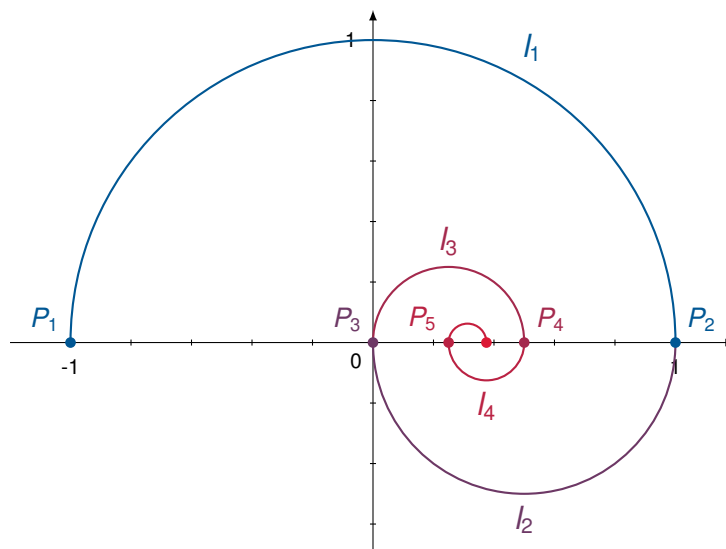
Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann man geometrisch folgendermaßen lösen: In einem Koordinatensystem zeichnet man die Punkte $A(0|1)$ und $B(-p|q)$. Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ schneidet die x -Achse in $X_1(x_1|0)$ und $X_2(x_2|0)$ (siehe Abbildung).

- Überprüfen Sie das Verfahren durch rechnerisches und geometrisches Lösen der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$.
- Zeigen Sie, dass allgemein gilt: x_1 ist Lösung der quadratischen Gleichung.

Hinweis: Pythagoras für $\triangle ABX_1$, verwenden Sie nur p , q und x_1 .

**Aufgabe 2: Spirale aus Halbkreisen**

In der Abbildung wird durch Zusammensetzen von Halbkreisen mit den Radien $r_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ für $i = 1, 2, 3, 4, \dots$ eine Spirale erzeugt.





Vorname

Nachname



- a) l_i sind die Längen der Halbkreisbögen (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Längen l_1 , l_2 und l_3 , der Halbkreisbögen. Wird mit unbeschränkt wachsendem n die Spiralenlänge beliebig groß oder gibt es einen Grenzwert für die Summe aller Längen

$$L_n = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n = \sum_{i=1}^n l_i.$$

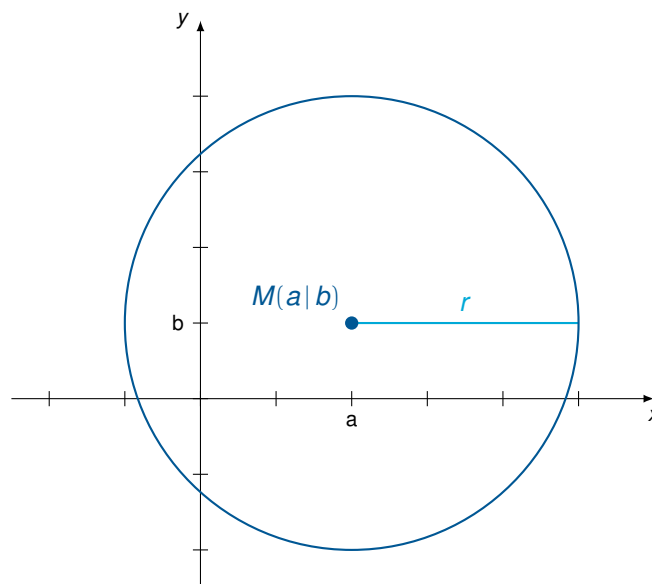
- b) Bestimmen Sie die den Punkten $P_n(x_n | 0)$ entsprechenden Zahlen x_n . Zeigen Sie, dass diese Punkte mit wachsendem n gegen einen Grenzpunkt streben.

Hinweis: Betrachten Sie getrennt die geraden oder ungeraden Glieder der Zahlenfolge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$; die Lösung für nur eine Teilfolge genügt.

Hinweis: $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Aufgabe 3: Quadratische Gleichungssysteme und Kreise

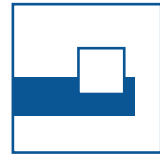
Die Gleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ beschreibt im Koordinatensystem einen Kreis um $M(a | b)$ mit Radius r .





Vorname

Nachname



- a) Zeichnen Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Kreise zu

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 \quad \text{und} \quad (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

und bestimmen Sie die Schnittpunkte.

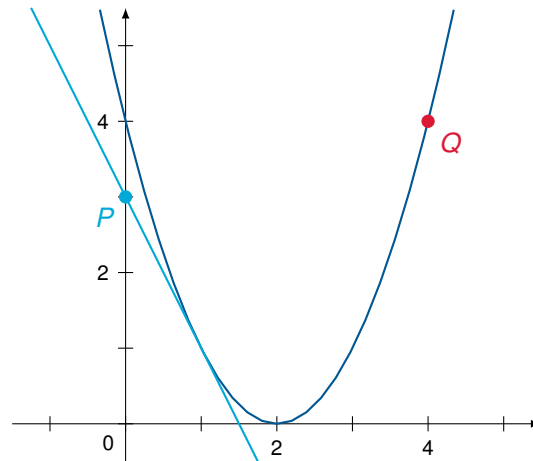
- b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte rechnerisch, indem Sie das System der beiden nichtlinearen Gleichungen lösen.

Aufgabe 4: Tangente an Parabel

Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $f(x) = (x - 2)^2$. Nun suchen wir eine Gerade, welche Tangente zur Parabel ist, die Parabel f also nur genau einmal berührt.

- a) Berechnen Sie die Gleichung derjenigen Geraden, die durch $P(0|3)$ geht und die Parabel f unterhalb von P berührt.

- b) Der Punkt $Q(4|4)$ liegt auf der Parabel f . Welche Gerade durch Q ist Tangente an der Parabel f ? Berechnen Sie die Steigung dieser Geraden. Welche Information über die Parabel erhält man auf diese Art?



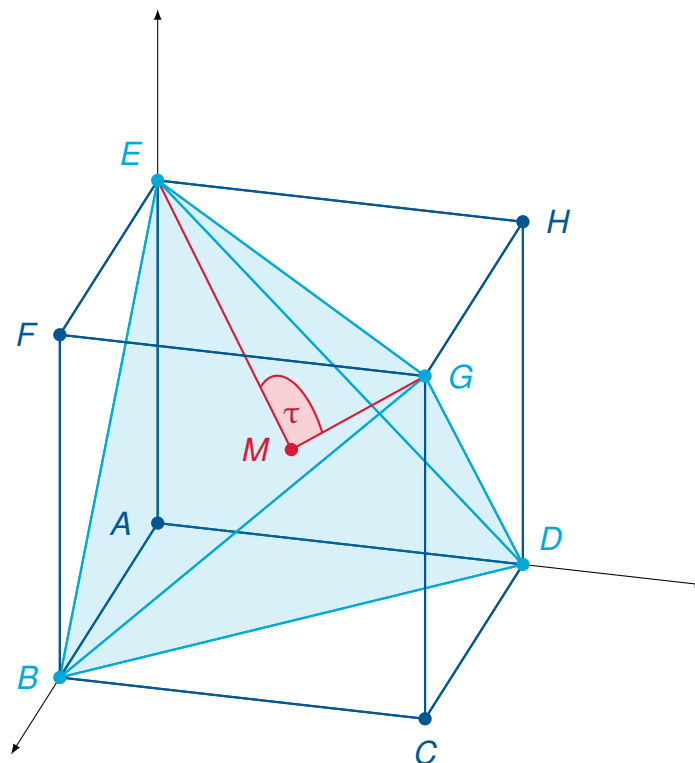
Aufgabe 5: Exponentialgleichungen

- a) Für welches x gilt: $5^x = \frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{625}}{125}$
- b) Für welche y gilt: $5^{2y} + 25 = 26 \cdot 5^y$

Berechnen Sie!

**Aufgabe 6: Tetraeder und Tetraederwinkel**

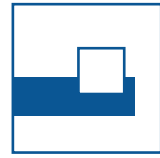
Wir denken uns im räumlichen Koordinatensystem einen Würfel $ABCDEFGH$ mit Kantenlänge 1 und dem Mittelpunkt $M(0,5 | 0,5 | 0,5)$. Verbindet man die Eckpunkte B, D, E und G , so erhält man einen Tetraeder.



- Berechnen Sie Kantenlänge, Oberflächeninhalt und Volumen des Tetraeders.
- Ermitteln Sie die Länge einer Strecke, die vom Mittelpunkt M zu einem Eckpunkt des Tetraeders führt.
- In der Chemie versteht man unter dem Tetraederwinkel τ den Winkel, der zwischen zwei verschiedenen Strecken liegt, die vom Mittelpunkt zu einem Eckpunkt des Tetraeders verlaufen. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels.

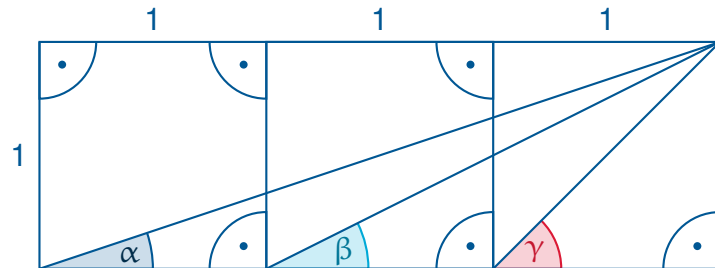


Vorname	Nachname
---------	----------



Aufgabe 7: Winkel und Längen in Dreiecken

Zeigen Sie: $\alpha + \beta = \gamma$



Aufgabe 8: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Alfred und Bernhard spielen ein Würfelspiel. Sie würfeln abwechselnd mit einem gewöhnlichen Würfel. Gewonnen hat derjenige, der eine 6 gewürfelt hat, ansonsten ist der andere wieder mit Würfeln an der Reihe. Alfred würfelt zuerst.

- Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten für Alfred und für Bernhard, wenn nach sechsmaligem Würfeln abgebrochen wird.
- Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten beider Spieler, wenn das Spiel nicht abgebrochen wird.

Hinweis: $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.