Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2025

Hausaufgabenversion

Aufgaben mit Lösungen

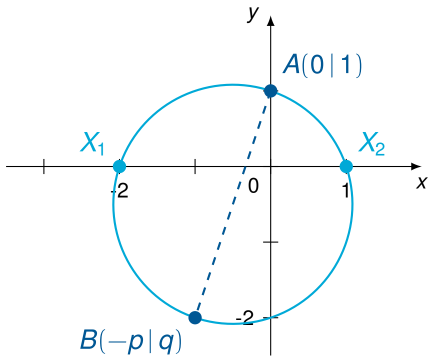
Aufgabe 1: pq-Formel geometrisch

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann man geometrisch folgendermaßen lösen: In einem Koordinatensystem zeichnet man die Punkte $A(0\,|\,1)$ und $B(-p\,|\,q)$. Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ schneidet die x-Achse in $X_1(x_1\,|\,0)$ und $X_2(x_2\,|\,0)$ (siehe Abbildung).

a) Überprüfen Sie das Verfahren durch rechnerisches und geometrisches Lösen der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$.

b) Zeigen Sie, dass allgemein gilt: x_1 ist Lösung der quadratischen Gleichung.

Hinweis: Pythagoras für $\triangle ABX_1$, verwenden Sie nur p, q und x_1.



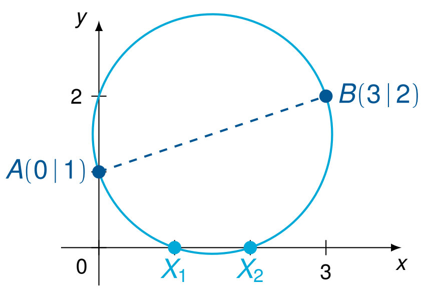
Lösung

a) Aus $x^2 - 3x + 2 = 0$ ergeben sich $p = -3$ und $q = 2$. Nach pq-Formel gilt also

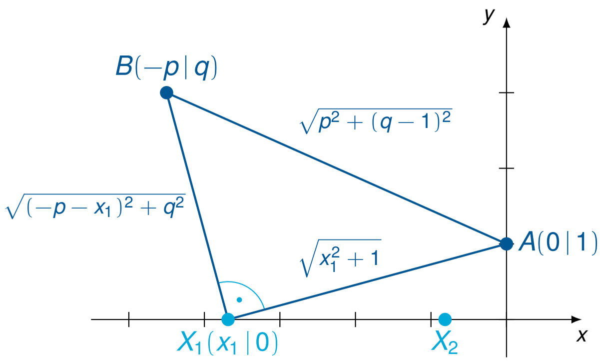
$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4} - 2} \\ &= \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

und damit $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

Geometrisch:



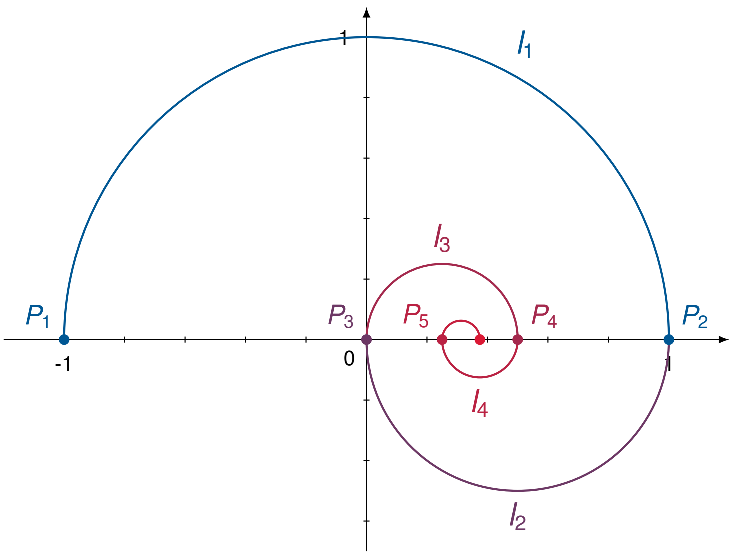
b) Es gilt im Dreieck $\triangle ABX_1$:



$$
\begin{aligned}
& & p^2+(q-1)^2 &= (-p-x_1)^2+q^2+x_1^2+1 \\
&\Leftrightarrow & p^2+q^2-2q+1 &= p^2+2px_1+x_1^2+q^2+x_1^2+1 \\
&\Leftrightarrow & -2q &= 2px_1+2x_1^2 \\
&\Leftrightarrow & 2x_1^2+2px_1+2q &= 0 \\
&\Leftrightarrow & x_1^2+px_1+q &= 0
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2: Spirale aus Halbkreisen

In der Abbildung wird durch Zusammensetzen von Halbkreisen mit den Radien $r_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ für $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ eine Spirale erzeugt.



a) l_i sind die Längen der Halbkreisbögen (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Längen l_1, l_2 und l_3, der Halbkreisbögen. Wird mit unbeschränkt wachsendem n die Spiralenlänge beliebig groß oder gibt es einen Grenzwert für die Summe aller Längen

$$L_n = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n = \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

b) Bestimmen Sie die den Punkten $P_n(x_n\,|\,0)$ entsprechenden Zahlen x_n. Zeigen Sie, dass diese Punkte mit wachsendem n gegen einen Grenzpunkt streben.
Hinweis: Betrachten Sie getrennt die geraden oder ungeraden Glieder der Zahlenfolge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$; die Lösung für nur eine Teilfolge genügt.

c) Je zwei Halbkreise mit den Radien r_i und r_{i+2} begrenzen zusammen mit der x-Achse ein sichelförmiges Flächenstück A_i. Berechnen Sie den Inhalt der Flächen A_1, A_2, A_3 und A_4.
Welchen Grenzwert (für $n \to \infty$) hat die Summe

$$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n?$$

Wie kann man dieses Ergebnis einfacher durch geometrische Überlegungen gewinnen?

Hinweis: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Lösung

a) Es gilt

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 & l_1 &= \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot r_1 = \pi \\ r_2 &= \tfrac{1}{2} & l_2 &= \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot r_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\pi \\ r_3 &= \tfrac{1}{4} & l_3 &= \tfrac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot r_3 = \tfrac{1}{4}\cdot\pi \\ &\vdots & &\vdots \\ r_i &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i-1} & l_i &= \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i-1}\cdot\pi \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Summe L_n der Längen

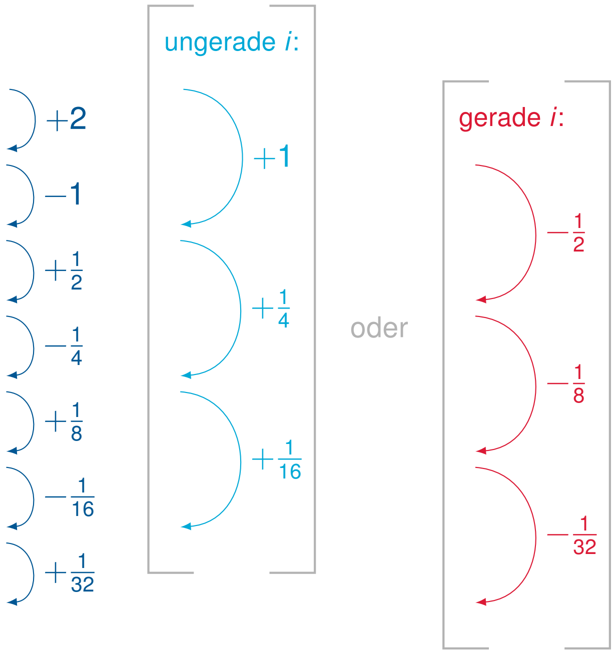
$$\begin{aligned} L_n &= l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n \\ &= \pi\cdot\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ &= \pi\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2\pi\cdot\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Strebt n gegen unendlich, ergeben sich die Grenzwerte

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{und} \quad L_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\pi.$$

b)

$P_1(-1\,\vert\,0)$	$x_1 = -1$
$P_2(1\,\vert\,0)$	$x_2 = 1$
$P_3(0\,\vert\,0)$	$x_3 = 0$
$P_4\left(\frac{1}{2}\,\vert\,0\right)$	$x_4 = \frac{1}{2}$
$P_5\left(\frac{1}{4}\,\vert\,0\right)$	$x_5 = \frac{1}{4}$
$P_6\left(\frac{3}{8}\,\vert\,0\right)$	$x_6 = \frac{3}{8}$
	$x_7 = \cdots$
	$x_8 = \cdots$



Für ungerade $i = 2n+1$ gilt

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= -1 + \left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^1 + \cdots + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \\ &= -1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} \\ &= -1 + \tfrac{4}{3}\left(1 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Alternativ die Berechnung für gerade $i = 2n$:

$$\begin{aligned} x_{2n} &= 1 - \tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^0 + \left(\tfrac{1}{4}\right)^1 + \cdots + \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-2}\right) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{\frac{3}{4}} \\ &= 1 - \tfrac{2}{3}\left(1 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Sollten beide Fälle berechnet worden sein, gibt es dennoch nur zwei Punkte für die Rechnung.

c) Für die Flächen A_1 bis A_4 gilt:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(1^2 - \left(\tfrac{1}{4}\right)^2\right) = \tfrac{15}{32} \cdot \pi \\
A_2 &= \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{8}\right)^2\right) = \tfrac{15}{128} \cdot \pi \\
A_3 &= \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{16}\right)^2\right) = \tfrac{15}{512} \cdot \pi \\
A_4 &= \tfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\left(\tfrac{1}{8}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{32}\right)^2\right) = \tfrac{15}{2048} \cdot \pi.
\end{aligned}$$

Wir beobachten, dass jeweils $A_{i+1} = \frac{1}{4}A_i$ ist, also

$$A_i = \tfrac{15}{8} \cdot \pi \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^i.$$

Für die Summe S_n bedeutet das

$$\begin{aligned}
S_n &= A_1 + \cdots + A_n \\
&= \tfrac{15}{8} \cdot \pi \cdot \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \cdots + \left(\tfrac{1}{4}\right)^n\right) \\
&= \tfrac{15}{8} \cdot \pi \cdot \frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \\
&= \tfrac{5}{2} \cdot \pi \cdot \left(\tfrac{1}{4} - \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Da $\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ für $n \to \infty$ gegen 0 geht, gilt

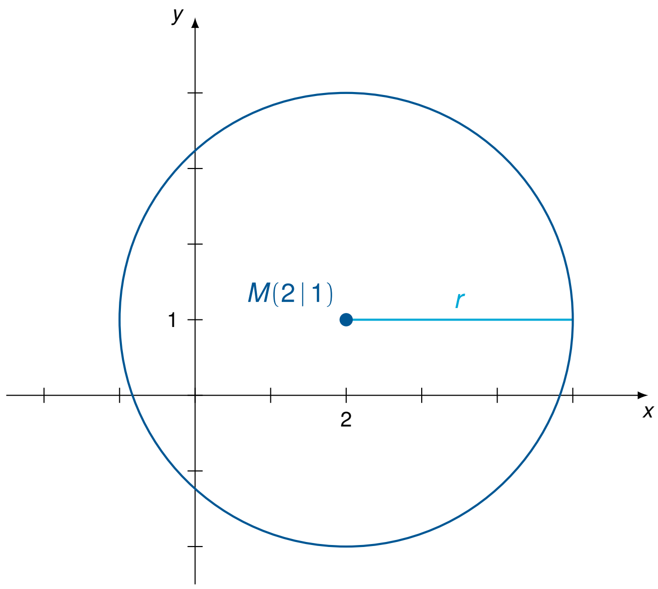
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \tfrac{5}{8} \cdot \pi.$$

Einfacher ist es allerdings, wenn man erkennt, dass alle A_i für ungerade i zusammen den oberen Halbkreis mit Radius 1 ergeben, während alle A_i mit geradem i zusammen den unteren Halbkreis mit Radius $\frac{1}{2}$ ergeben. Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i \text{ ungerade}} A_i + \sum_{i \text{ gerade}} A_i = \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{8} = \tfrac{5}{8} \cdot \pi.$$

Aufgabe 3: Quadratische Gleichungssysteme und Kreise

Die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ beschreibt im Koordinatensystem einen Kreis um $M(0\,|\,0)$ mit Radius r.



a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2$ einen Kreis um $M(2\,|\,1)$ mit Radius r beschreibt (siehe Abbildung).

b) Zeichnen Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Kreise zu

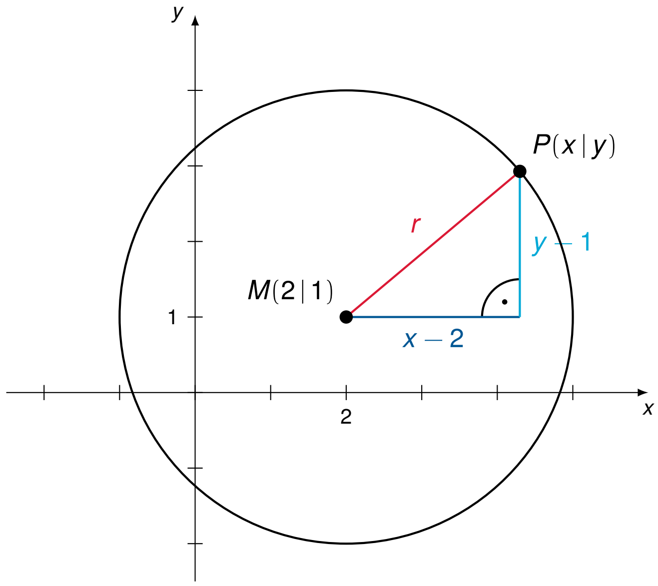
$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad \text{und} \qquad (x+5)^2 + (y-4)^2 = 25$$

und bestimmen Sie die Schnittpunkte.

c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte rechnerisch, indem Sie das System der beiden nichtlinearen Gleichungen lösen.

Lösung

a) Wir zeichnen ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\overline{MP}$ und zwei zu den Koordinatenachsen parallelen Katheten.

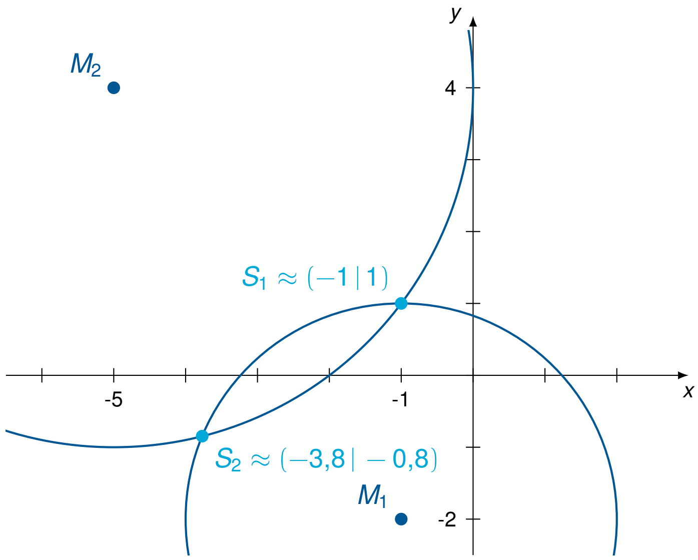


Es gilt der Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} r^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ &= (x-2)^2 + (y-1)^2 \end{aligned}$$

und damit die Kreisgleichung.

b)



c)

$$
\begin{aligned}
(x+1)^2+(y+2)^2&=9 && (1)\\
(x+5)^2+(y-4)^2&=25 && (2)\\
x^2+2x+1+y^2+4y+4&=9 && (1)\\
x^2+10x+25+y^2-8y+16&=25 && (2)\\
8x+24-12y+12&=16 && (3)=(2)\text{-}(1)\\
8x-12y&=-20 && (4)=(3)\text{-}36\\
x&=-\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}y && (5)=((4)+12y)/8\\
\left(-\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}y\right)^2+(y+2)^2&=9 && (6)=(5)\text{ in }(1)\\
\tfrac{9}{4}-\tfrac{9}{2}y+\tfrac{9}{4}y^2+y^2+4y+4&=9 && (6)\\
\tfrac{13}{4}y^2-\tfrac{1}{2}y-\tfrac{11}{4}&=0 && (7)=(6)\text{-}9\\
y^2-\tfrac{2}{13}y-\tfrac{11}{13}&=0 && (8)=\tfrac{4}{13}(8)\\
y_{1,2}&=\tfrac{1}{13}\pm\sqrt{\tfrac{1}{169}+\tfrac{11}{13}} && (9)=(8)\text{+pq-Formel}\\
&=\tfrac{1}{13}\pm\sqrt{\tfrac{1}{169}+\tfrac{143}{169}}\\
&=\tfrac{1}{13}\pm\tfrac{12}{13}\\
y_1=1\ \wedge\ y_2&=-\tfrac{11}{13}
\end{aligned}
$$

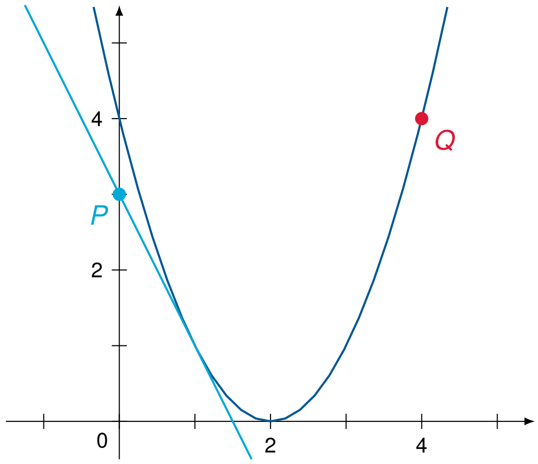
Der x-Wert zu y_1 beträgt $x_1=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=-1$, der x-Wert zu y_2 beträgt

$$x_2=-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{11}{13}\right)=-\frac{5}{2}-\frac{33}{26}=-\frac{98}{26}=-\frac{49}{13}=-3\frac{10}{13}.$$

Die Schnittpunkte sind also $S_1(-1\,|\,1)$ und $S_2(-3\frac{10}{13}\,|\,-\frac{11}{13})$.

Aufgabe 4: Tangente an Parabel

Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $f(x) = (x-2)^2$. Nun suchen wir eine Gerade, welche Tangente zur Parabel ist, die Parabel f also nur genau einmal berührt.



a) Berechnen Sie die Gleichung derjenigen Geraden, die durch $P(0\,|\,3)$ geht und die Parabel f unterhalb von P berührt.

b) Der Punkt $Q(4\,|\,4)$ liegt auf der Parabel f. Welche Gerade durch Q ist Tangente an der Parabel f? Berechnen Sie die Steigung dieser Geraden. Welche Information über die Parabel erhält man auf diese Art?

c) Nun betrachten wir den Punkt $R\left(a\,|\,(a-2)^2\right)$ auf der Parabel f. Ermitteln Sie nach dem Verfahren aus b) die Steigung der Tangente an die Parabel an einer beliebigen Stelle a.

Lösung

a) Eine Gerade durch den Punkt $P(0\,|\,3)$ hat die Form $y = m \cdot x + 3$ mit beliebigem m. Schneidet die Gerade die Parabel f, so gilt für die Schnittpunkte

$$
\begin{aligned}
& & (x-2)^2 &= mx + 3 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - 4x + 4 &= mx + 3 \\
&\Leftrightarrow & x^2 - (4+m)x + 1 &= 0 \\
&\Rightarrow & x_{1,2} &= \tfrac{4+m}{2} \pm \sqrt{\tfrac{(4+m)^2}{4} - 1}.
\end{aligned}
$$

Soll die Gerade eine Tangente sein, darf nur ein Schnittpunkt existieren, es muss also gelten

$$
\begin{aligned}
&& \sqrt{\tfrac{(4+m)^2}{4} - 1} = 0 \\
\Leftrightarrow && \tfrac{(4+m)^2}{4} - 1 = 0 \\
\Leftrightarrow && (4+m)^2 - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow && 16 - 8m + m^2 - 4 = 0 \\
\Leftrightarrow && m^2 - 8m + 12 = 0 \\
\Rightarrow && m_{1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 12} \\
&& = -4 \pm 2 \\
\Leftrightarrow && m_1 = -6 \ \wedge \ m_2 = -2.
\end{aligned}
$$

Die weniger steile Tangente mit Steigung $m = -2$ berührt die Parabel unterhalb von Punkt P.

b) Für eine allgemeine Gerade $y = m \cdot x + b$ durch den Punkt $Q(4\,|\,4)$ muss

$$4 = 4m + b \quad \text{bzw.} \quad b = 4 - 4m$$

gelten. Die Gerade hat also die Form $y = mx + 4 - 4m$ mit beliebigem m. Schneidet die Gerade die Parabel f, so gilt für die Schnittpunkte

$$
\begin{aligned}
&& (x-2)^2 = mx + 4 - 4m \\
\Leftrightarrow && x^2 - (4+m)x + 4m = 0 \\
\Rightarrow && x_{1,2} = \tfrac{4+m}{2} \pm \sqrt{\tfrac{(4+m)^2}{4} - \tfrac{16m}{4}}.
\end{aligned}
$$

Auch hier gilt, soll die Gerade eine Tangente sein, darf nur ein Schnittpunkt existieren, es muss also wieder die Diskriminante gleich 0 gesetzt werden

$$
\begin{aligned}
&& \sqrt{\tfrac{(4+m)^2}{4} - \tfrac{16m}{4}} = 0 \\
\Leftrightarrow && \tfrac{(4+m)^2}{4} - \tfrac{16m}{4} = 0 \\
\Leftrightarrow && 16 - 8m + m^2 - 16m = 0 \\
\Leftrightarrow && m^2 - 8m + 16 = 0 \\
\Leftrightarrow && (m-4)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow && m = 4.
\end{aligned}
$$

Die Steigung der Tangente durch Q beträgt also 4. Das ist auch die Steigung der Parabel f an der Stelle $x = 4$.

c) Eine Tangente hat die Form $y = m \cdot x + b$. Einsetzen der Koordinaten des Berührpunktes $R\left(a \,|\, a^2 - 4a + 4\right)$ liefert

$$\begin{aligned} && a^2 - 4a + 4 &= m \cdot a + b \\ \Leftrightarrow && a^2 - (4+m) \cdot a + 4 &= b. \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir die nur vom Parameter m abhängige Tangentengleichung

$$y = m \cdot x + a^2 - (4+m) \cdot a + 4.$$

Nun setzen wir die Terme von Parabel und Gerade gleich:

$$\begin{aligned} && x^2 - 4x + 4 &= mx + a^2 - (4+m) \cdot a + 4 \\ \Leftrightarrow && x^2 \underbrace{-(4+m)}_{p} \cdot x \underbrace{-a^2 + (4+m) \cdot a}_{q} &= 0. \end{aligned}$$

Durch die pq-Formel erhalten wir daraus

$$x_{1,2} = \tfrac{4+m}{2} \pm \sqrt{\tfrac{(4+m)^2}{4} + a^2 - (4+m) \cdot a}.$$

Da die Gerade eine Tangente sein soll, darf es nur genau einen Schnittpunkt $x_1 = x_2$ geben, also gilt:

$$\begin{aligned} && \tfrac{(4+m)^2}{4} + a^2 - (4+m) \cdot a &= 0 \\ \Leftrightarrow && (4+m)^2 + 4a^2 - 16a - 4am &= 0 \\ \Leftrightarrow && 16 + 8m + m^2 + 4a^2 - 16a - 4am &= 0 \\ \Leftrightarrow && m^2 + \underbrace{(8-4a)}_{p}\, m + \underbrace{4a^2 - 16a + 16}_{q} &= 0 \end{aligned}$$

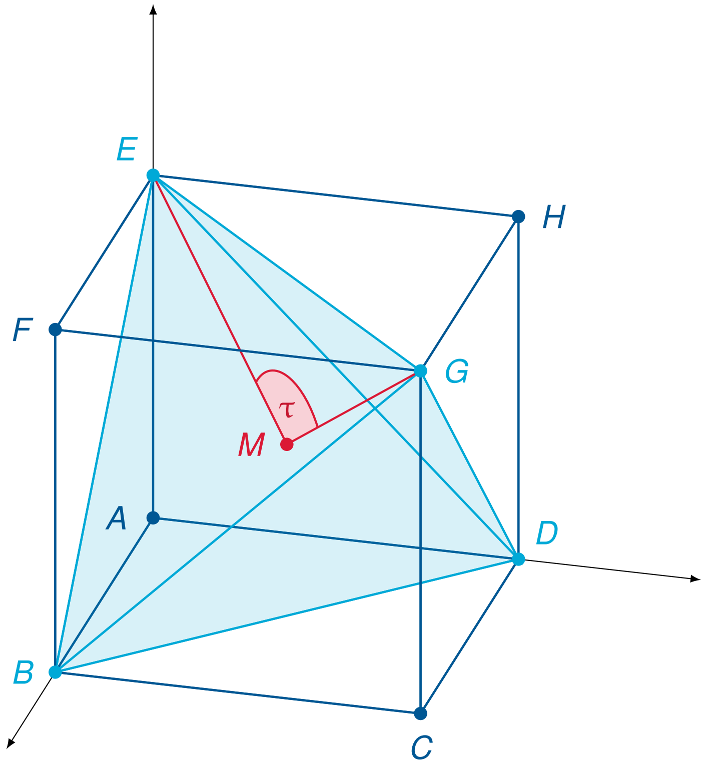
Erneut nach pq-Formel ergibt sich für die Steigung m

$$\begin{aligned} m &= 2a - 4 \pm \sqrt{(2a-4)^2 - 4a^2 + 16a - 16} \\ &= 2a - 4 \pm \sqrt{0} \\ &= 2a - 4 \end{aligned}$$

Demnach hat eine Tangente an der Stelle a der Parabel f die Steigung $2a - 4$.

Aufgabe 5: Tetraeder und Tetraederwinkel

Wir denken uns im räumlichen Koordinatensystem einen Würfel *ABCDEFGH* mit Kantenlänge 1 und dem Mittelpunkt $M(0{,}5\,|\,0{,}5\,|\,0{,}5)$. Verbindet man die Eckpunkte B, D, E und G, so erhält man einen Tetraeder.



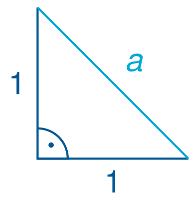
a) Berechnen Sie Kantenlänge, Oberflächeninhalt und Volumen des Tetraeders.

b) Ermitteln Sie die Länge einer Strecke, die vom Mittelpunkt M zu einem Eckpunkt des Tetreaders führt.

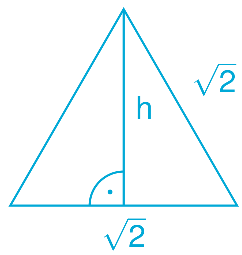
c) In der Chemie versteht man unter dem Tetraederwinkel τ den Winkel, der zwischen zwei verschiedenen Strecken liegt, die vom Mittelpunkt zu einem Eckpunkt desTetraeders verlaufen. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels.

Lösung

a) Für die Kantenlänge a gilt $a^2 = 1^2 + 1^2$, also $a = \sqrt{2}$.



Für den Flächeninhalt eines Außéndreiecks berechnen wir zunächst dessen Höhe h. Dabei gilt:



$$
\begin{aligned}
& h^2 + \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2}^2 \\
\Leftrightarrow\quad & h^2 + \tfrac{1}{2} = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & h^2 = \tfrac{3}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & h = \sqrt{\tfrac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

Ein Außendreieck hat also die Fläche

$$A_{\triangle} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

und der gesamte Tetraeder den Oberflächeninhalt $O_{\text{Tetr}} = 4A_{\triangle} = 2\cdot\sqrt{3}$.

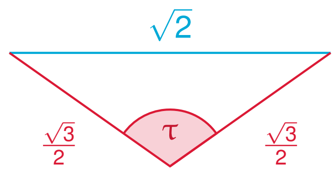
Das Volumen des Tetraeders ergibt sich aus dem Volumen des Würfels minus der vier Außenpyramiden:

$$V_{\text{Tetr}} = V_{\text{Würfel}} - 4\cdot V_{\text{Pyr}} = 1 - 4\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3}.$$

b) Der Abstand zwischen dem Mittelpunkt $M(0{,}5\,|\,0{,}5\,|\,0{,}5)$ und einer Ecke, z.B. $(0\,|\,0\,|\,0)$ beträgt

$$d = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Zur Berechnung des Tetraederwinkels τ nutzen wir den Kosinussatz:



$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\tau$$

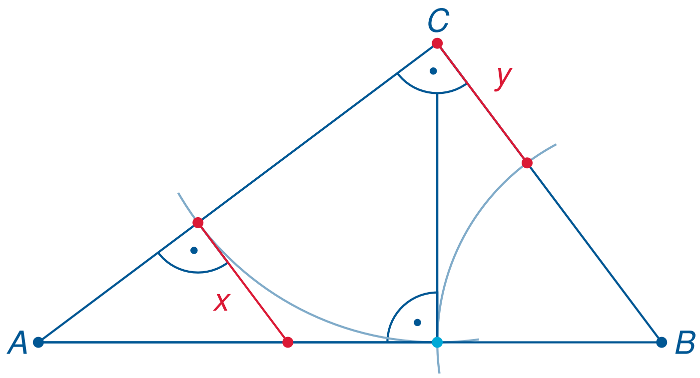
$$\Leftrightarrow \quad 2 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{2}\cdot\cos\tau$$

$$\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{2}\cdot\cos\tau$$

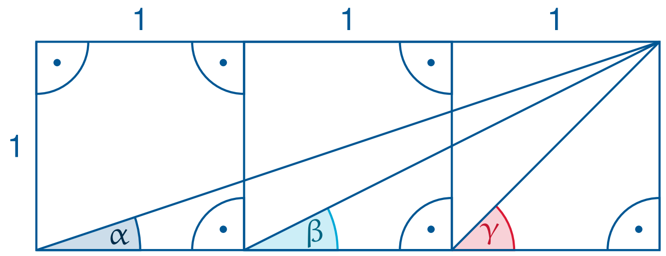
$$\Rightarrow \quad \tau \approx 109{,}47^\circ$$

Aufgabe 6: Winkel und Längen in Dreiecken

a) Zeigen Sie: $x = y$

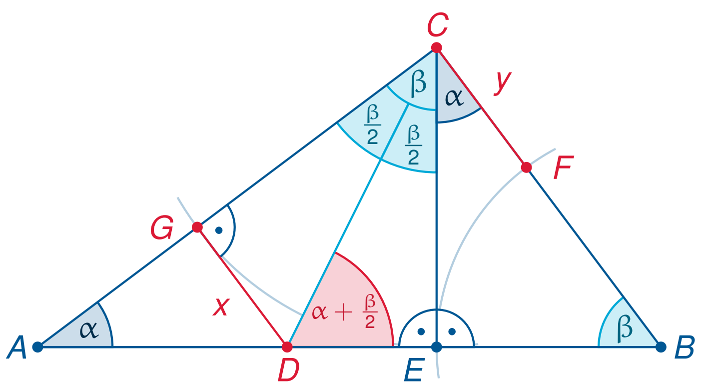


b) Zeigen Sie: $\alpha + \beta = \gamma$



Lösung

a)



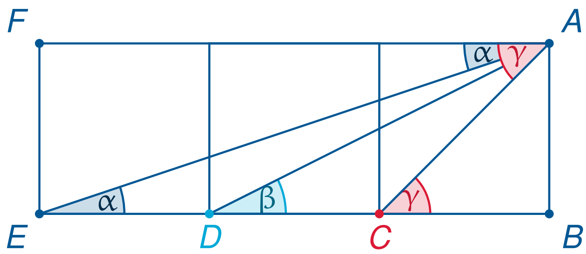
Der Beweis erfolgt am besten über die Betrachtung ähnlicher und kongruenter Dreiecke. Z.B.

$$\overline{CG} = \overline{CE} \tag{1}$$
$$\triangle CGD \cong \triangle CDE \tag{2}$$
$$\sphericalangle ACE = \beta \tag{3}$$
$$\sphericalangle DCE = \sphericalangle GCD = \frac{\beta}{2} \tag{4}$$
$$\sphericalangle ECB = \alpha \tag{5}$$
$$\sphericalangle CDA = 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2} \tag{6}$$
$$\sphericalangle EDC = \alpha + \frac{\beta}{2} \tag{7}$$
$$\triangle BCD \text{ gleichschenklig mit Spitze } B \tag{8}$$
$$\overline{BD} = \overline{BC} \text{ und } \overline{BF} = \overline{BE} \tag{9}$$
$$\Rightarrow x = y \tag{10}$$

Es gibt viele andere Lösungswege.

b) Zur besseren Berechnung geben wir den verschiedenen Eckpunkten Bezeichnungen und betrachten drei zusätzliche Winkel:

$\sphericalangle FAC = \gamma$ (Wechselwinkel)
$\sphericalangle FAE = \alpha$ (Wechselwinkel)



Es felht noch zu zeigen, dass $\sphericalangle EAC = \beta$ gilt. Dazu betrachten wir die Dreiecke $\triangle ECA$ und $\triangle DCA$. Diese haben die Seitenlängen:

Dreieck	Lange Seite	Mittlere Seite	Kurze Seite
$\triangle ECA$	$\sqrt{10}$	2	$\sqrt{2}$
$\triangle DCA$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1

Offenbar ist $\triangle ECA$ ähnlich zu $\triangle DCA$, denn die Seitenlängen sind jeweils das $\sqrt{2}$-fache voneinander. Dann sind auch entsprechende Winkel der beiden Dreiecke gleich. β liegt zwischen der kurzen und langen Seite in $\triangle DCA$, also ist der zwischen der kurzen und langen Seite von $\triangle ECA$ gelegene Winkel $\sphericalangle EAC$ ebenfalls gleich β.

Daraus folgt $\alpha + \beta = \gamma$.

Aufgabe 7: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Christiaan Huygens (1629 -1695) stellte in seinem „Tractatus de ratiociniis in ludo aleae“ (1657) den Lesern folgendes Problem:

> *Drei Spieler A, B und C nehmen 12 Steine, von denen 4 weiß und 8 schwarz sind, und spielen unter der Bedingung, dass derjenige Spieler Sieger sei, der als erster mit verbundenen Augen einen weißen Stein ergreift; dabei solle zuerst A, dann B und schließlich C ziehen, dann wieder A und so fort. Gefragt wird, in welchem Verhältnis ihre Chancen zueinander stehen.*

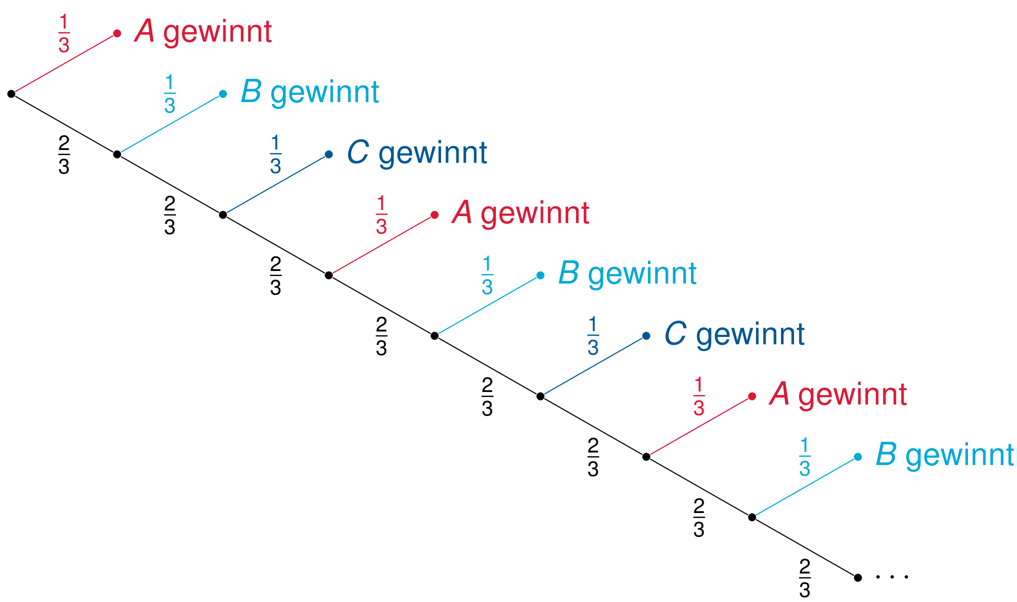
Jan Hudde (1628 – 1704) schickte Huygens im Frühjahr 1665 seine Lösung. Überzeugt, richtig gerechnet zu haben, schickt Huygens daraufhin seine eigene, abweichende Lösung am 4.4.1665 an Hudde. Gleich am nächsten Tag fand Hudde den Grund für die Diskrepanz. Die Aufgabe war nicht eindeutig formuliert!

a) Huygens hatte bei seiner Lösung mit de Annahme gerechnet, als würden die Steine mit Zurücklegen gezogen. Zu welchem Ergebnis kam Huygens? Berechnen Sie.

b) Hudde hatte die Aufgabe so verstanden, dass die Steine ohne Zurücklegen gezogen werden. Welche Werte erhielt er so? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten nun im Sinne von Hudde.

Lösung

a)



Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof
Internet: zfm.education · Email: mw-e@z-f-m.de

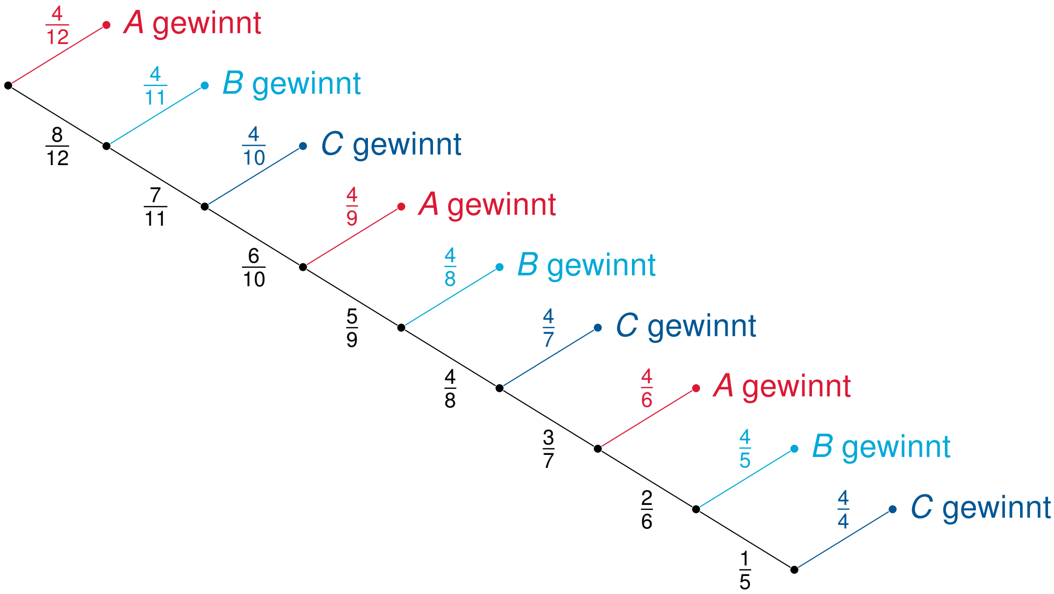
Hier haben wir ein nie abbrechendes Baumdiagramm. Die addierten Wahrscheinlichkeiten lassen sich als geometrische Reihe schreiben. Wir berechnen zunächst die Summe $\mathbb{P}_n$ bis zum Exponenten n und lassen dann n gegen unendlich laufen. Dadurch ergeben sich folgende Gesamtwahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n(A) &= \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^9 + \dots + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{3n} \\
&= \tfrac{1}{3} \cdot \left(\left(\tfrac{8}{27}\right)^0 + \left(\tfrac{8}{27}\right)^1 + \left(\tfrac{8}{27}\right)^2 + \dots + \left(\tfrac{8}{27}\right)^n\right) \\
&= \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}}{\frac{19}{27}} \\
&= \tfrac{9}{19} \cdot \left(1 - \left(\tfrac{8}{27}\right)^{n+1}\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \tfrac{9}{19} = \mathbb{P}(A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n(B) &= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 + \dots + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{3n} \\
&= \tfrac{2}{9} \cdot \frac{1 - \left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}}{\frac{19}{27}} \\
&= \tfrac{6}{19} \cdot \left(1 - \left(\tfrac{8}{27}\right)^{n+1}\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \tfrac{6}{19} = \mathbb{P}(B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_n(C) &= \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 + \dots + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)^{3n} \\
&= \tfrac{4}{27} \cdot \frac{1 - \left(\frac{8}{27}\right)^{n+1}}{\frac{19}{27}} \\
&= \tfrac{4}{19} \cdot \left(1 - \left(\tfrac{8}{27}\right)^{n+1}\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \tfrac{4}{19} = \mathbb{P}(C)
\end{aligned}$$

b)



Das Baumdiagramm ist endlich und bricht spätestens mit der 9. Ziehung ab. Über Pfad- und Summenregel ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \tfrac{4}{12} + \tfrac{8}{12}\cdot\tfrac{7}{11}\cdot\tfrac{6}{10}\cdot\tfrac{4}{9} + \tfrac{8}{12}\cdot\tfrac{7}{11}\cdot\ldots\cdot\tfrac{3}{7}\cdot\tfrac{4}{6}\\
&= \tfrac{1}{3} + \tfrac{56}{495} + \tfrac{14}{693}\\
&= \tfrac{7}{15}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \tfrac{8}{12}\cdot\tfrac{4}{11} + \tfrac{8}{12}\cdot\tfrac{7}{11}\cdot\tfrac{6}{10}\cdot\tfrac{5}{9}\cdot\tfrac{4}{8} + \tfrac{8}{12}\cdot\tfrac{7}{11}\cdot\ldots\cdot\tfrac{2}{6}\cdot\tfrac{4}{5}\\
&= \tfrac{8}{33} + \tfrac{7}{99} + \tfrac{4}{495}\\
&= \tfrac{53}{165}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \tfrac{8}{12}\cdot\tfrac{7}{11}\cdot\tfrac{4}{10} + \tfrac{8}{12}\cdot\tfrac{7}{11}\cdot\ldots\cdot\tfrac{4}{8}\cdot\tfrac{4}{7} + \tfrac{8}{12}\cdot\tfrac{7}{11}\cdot\ldots\cdot\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{4}{4}\\
&= \tfrac{28}{165} + \tfrac{4}{99} + \tfrac{1}{495}\\
&= \tfrac{7}{33}
\end{aligned}
$$