Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2025

Hausaufgabenversion

Aufgaben

Allgemeine Hinweise:
Als Hilfsmittel dürfen Schreibzeug, Geodreieck und Zirkel benutzt werden. Wissenschaftliche Taschenrechner und eine Formelsammlung sind ebenfalls zugelassen.

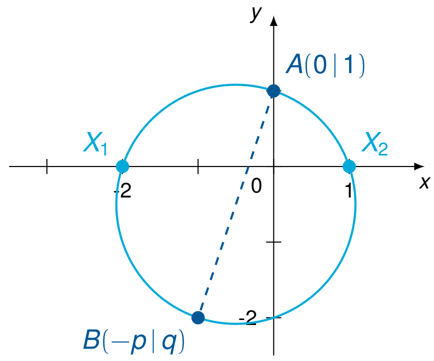
Aufgabe 1: pq-Formel geometrisch

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ kann man geometrisch folgendermaßen lösen: In einem Koordinatensystem zeichnet man die Punkte $A(0\,|\,1)$ und $B(-p\,|\,q)$. Der Thaleskreis über $\overline{AB}$ schneidet die x-Achse in $X_1(x_1\,|\,0)$ und $X_2(x_2\,|\,0)$ (siehe Abbildung).

a) Überprüfen Sie das Verfahren durch rechnerisches und geometrisches Lösen der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$.

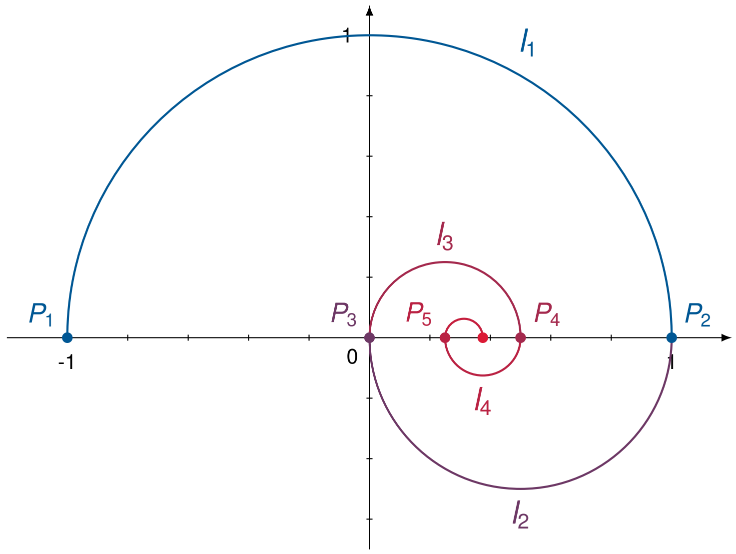
b) Zeigen Sie, dass allgemein gilt: x_1 ist Lösung der quadratischen Gleichung.

Hinweis: Pythagoras für $\triangle ABX_1$, verwenden Sie nur p, q und x_1.



Aufgabe 2: Spirale aus Halbkreisen

In der Abbildung wird durch Zusammensetzen von Halbkreisen mit den Radien $r_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$ für $i = 1, 2, 3, 4, \ldots$ eine Spirale erzeugt.



a) l_i sind die Längen der Halbkreisbögen (siehe Abbildung). Berechnen Sie die Längen l_1, l_2 und l_3, der Halbkreisbögen. Wird mit unbeschränkt wachsendem n die Spiralenlänge beliebig groß oder gibt es einen Grenzwert für die Summe aller Längen

$$L_n = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n = \sum_{i=1}^{n} l_i.$$

b) Bestimmen Sie die den Punkten $P_n(x_n \,|\, 0)$ entsprechenden Zahlen x_n. Zeigen Sie, dass diese Punkte mit wachsendem n gegen einen Grenzpunkt streben.
Hinweis: Betrachten Sie getrennt die geraden oder ungeraden Glieder der Zahlenfolge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$; die Lösung für nur eine Teilfolge genügt.

c) Je zwei Halbkreise mit den Radien r_i und r_{i+2} begrenzen zusammen mit der x-Achse ein sichelförmiges Flächenstück A_i. Berechnen Sie den Inhalt der Flächen A_1, A_2, A_3 und A_4.

Welchen Grenzwert (für $n \to \infty$) hat die Summe

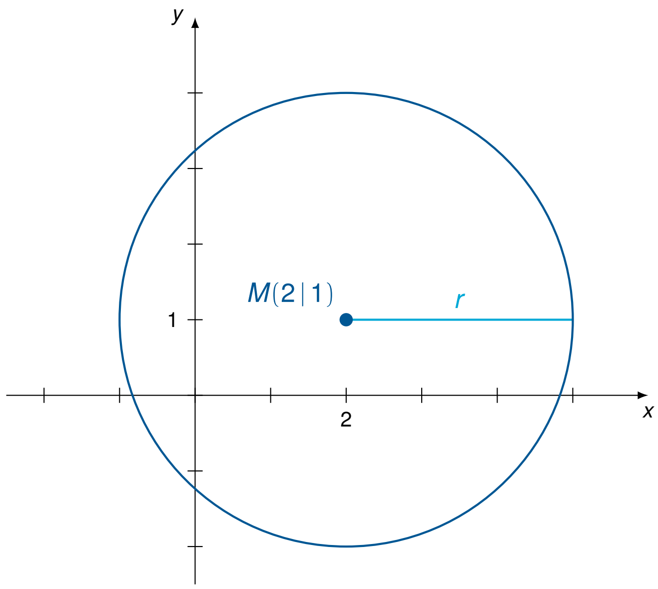
$$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n?$$

Wie kann man dieses Ergebnis einfacher durch geometrische Überlegungen gewinnen?

Hinweis: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Aufgabe 3: Quadratische Gleichungssysteme und Kreise

Die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ beschreibt im Koordinatensystem einen Kreis um $M(0\,|\,0)$ mit Radius r.



a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2$ einen Kreis um $M(2\,|\,1)$ mit Radius r beschreibt (siehe Abbildung).

b) Zeichnen Sie in einem gemeinsamen Koordinatensystem die Kreise zu

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad \text{und} \qquad (x+5)^2 + (y-4)^2 = 25$$

und bestimmen Sie die Schnittpunkte.

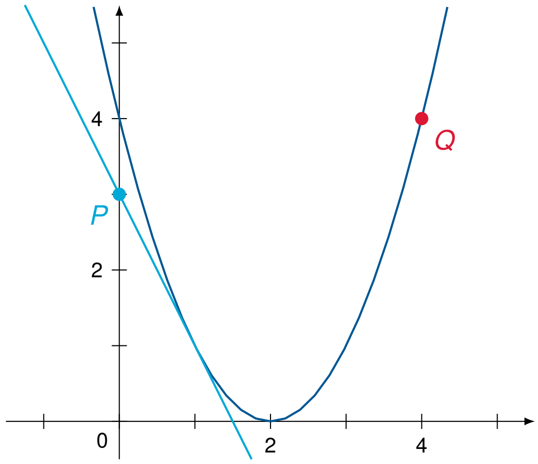
c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte rechnerisch, indem Sie das System der beiden nichtlinearen Gleichungen lösen.

Aufgabe 4: Tangente an Parabel

Gegeben ist die Parabel mit der Gleichung $f(x) = (x-2)^2$. Nun suchen wir eine Gerade, welche Tangente zur Parabel ist, die Parabel f also nur genau einmal berührt.

a) Berechnen Sie die Gleichung derjenigen Geraden, die durch $P(0\,|\,3)$ geht und die Parabel f unterhalb von P berührt.

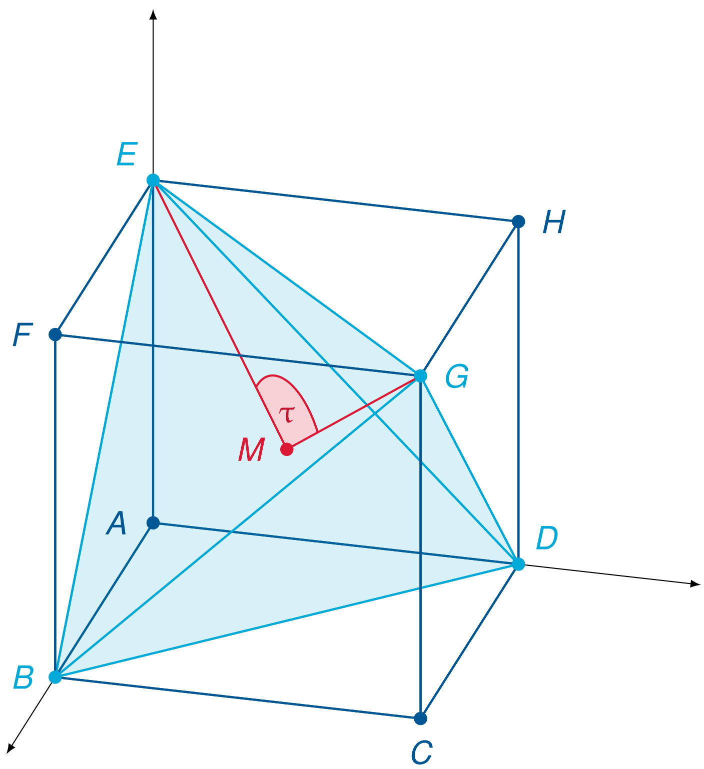
b) Der Punkt $Q(4\,|\,4)$ liegt auf der Parabel f. Welche Gerade durch Q ist Tangente an der Parabel f? Berechnen Sie die Steigung dieser Geraden. Welche Information über die Parabel erhält man auf diese Art?



c) Nun betrachten wir den Punkt $R\left(a\,|\,(a-2)^2\right)$ auf der Parabel f. Ermitteln Sie nach dem Verfahren aus b) die Steigung der Tangente an die Parabel an einer beliebigen Stelle a.

Aufgabe 5: Tetraeder und Tetraederwinkel

Wir denken uns im räumlichen Koordinatensystem einen Würfel *ABCDEFGH* mit Kantenlänge 1 und dem Mittelpunkt $M(0{,}5\,|\,0{,}5\,|\,0{,}5)$. Verbindet man die Eckpunkte B, D, E und G, so erhält man einen Tetraeder.



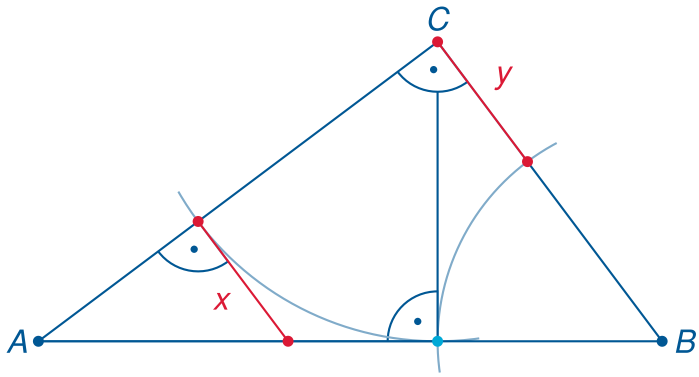
a) Berechnen Sie Kantenlänge, Oberflächeninhalt und Volumen des Tetraeders.

b) Ermitteln Sie die Länge einer Strecke, die vom Mittelpunkt M zu einem Eckpunkt des Tetreaders führt.

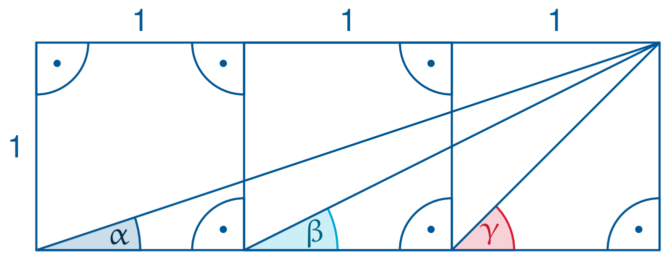
c) In der Chemie versteht man unter dem Tetraederwinkel τ den Winkel, der zwischen zwei verschiedenen Strecken liegt, die vom Mittelpunkt zu einem Eckpunkt desTetraeders verlaufen. Berechnen Sie die Größe dieses Winkels.

Aufgabe 6: Winkel und Längen in Dreiecken

a) Zeigen Sie: $x = y$



b) Zeigen Sie: $\alpha + \beta = \gamma$



Aufgabe 7: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Christiaan Huygens (1629 -1695) stellte in seinem „Tractatus de ratiociniis in ludo aleae“ (1657) den Lesern folgendes Problem:

> *Drei Spieler A, B und C nehmen 12 Steine, von denen 4 weiß und 8 schwarz sind, und spielen unter der Bedingung, dass derjenige Spieler Sieger sei, der als erster mit verbundenen Augen einen weißen Stein ergreift; dabei solle zuerst A, dann B und schließlich C ziehen, dann wieder A und so fort. Gefragt wird, in welchem Verhältnis ihre Chancen zueinander stehen.*

Jan Hudde (1628 – 1704) schickte Huygens im Frühjahr 1665 seine Lösung. Überzeugt, richtig gerechnet zu haben, schickt Huygens daraufhin seine eigene, abweichende Lösung am 4.4.1665 an Hudde. Gleich am nächsten Tag fand Hudde den Grund für die Diskrepanz. Die Aufgabe war nicht eindeutig formuliert!

a) Huygens hatte bei seiner Lösung mit de Annahme gerechnet, als würden die Steine mit Zurücklegen gezogen. Zu welchem Ergebnis kam Huygens? Berechnen Sie.

b) Hudde hatte die Aufgabe so verstanden, dass die Steine ohne Zurücklegen gezogen werden. Welche Werte erhielt er so? Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten nun im Sinne von Hudde.