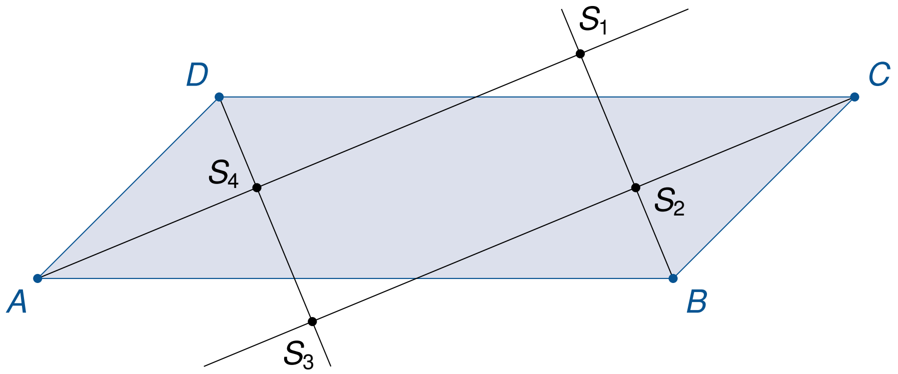
Tag der Mathematik 2023

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe G1

In einem Parallelogramm $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ seien die Winkelhalbierenden der Innenwinkel bei A, B, C und D konstruiert. Dabei auftretende Schnittpunkte von Winkelhalbierenden seien so mit S_1, S_2, S_3 und S_4 bezeichnet, wie aus der nachstehenden Abbildung ersichtlich wird.

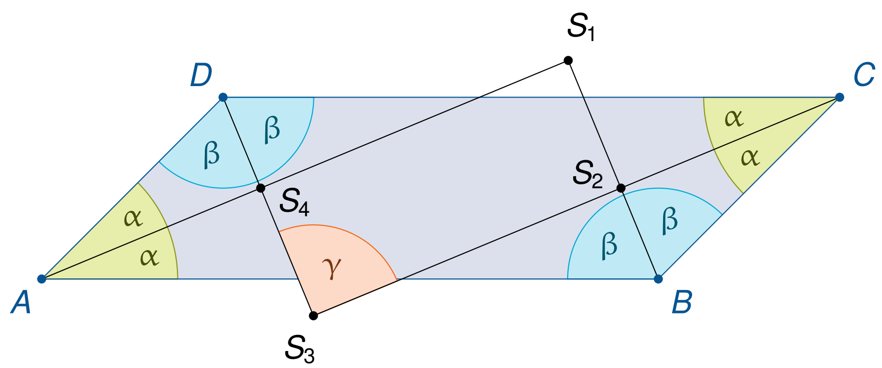


a) Beweisen Sie, dass das Viereck $S_1S_2S_3S_4$ unter diesen Voraussetzungen stets ein Rechteck ist.

b) Zusätzlich werde nun vorausgesetzt, dass der Punkt S_1 auf der Strecke CD liegt. Ermitteln Sie das Verhältnis $AB : BC$.

Lösung

a) Gegenüberliegende Winkel im Parallelogramm sind gleich.



Dies gilt also auch für die grünen Winkel α bei A und C. Analog sind die blauen Winkel β gleich.

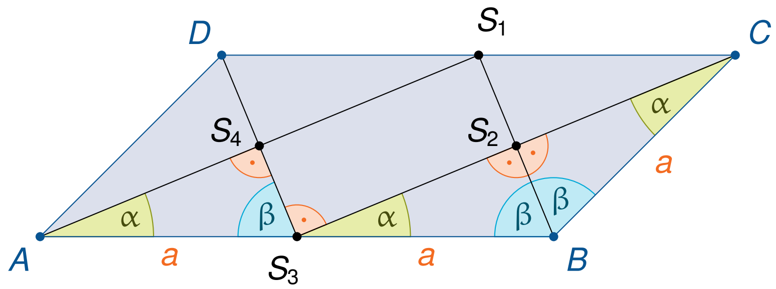
Damit sind die Winkelhalbierenden durch die gegenüberliegenden Eckpunkte des Parallelgramms A und C parallel und ebenso die Winkelhalbierenden durch B und D.
Für die Winkelsumme des Parallelgramms gilt

$$360^\circ = 4\alpha + 4\beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ.$$

Betrachten wir exemplarisch nun das Dreieck CDS_3 mit den Winkeln α, β und γ dann gilt

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

b) Durch Aufgabenteil a) sehen wir, dass alle entstehenden Dreiecke kongruent sind.Insbesondere sind also die Dreiecke AS_3S_4, S_3BS_2 und BCS_2 kongruent. Bezeichnen wir deren längste Seite jeweils mit a:



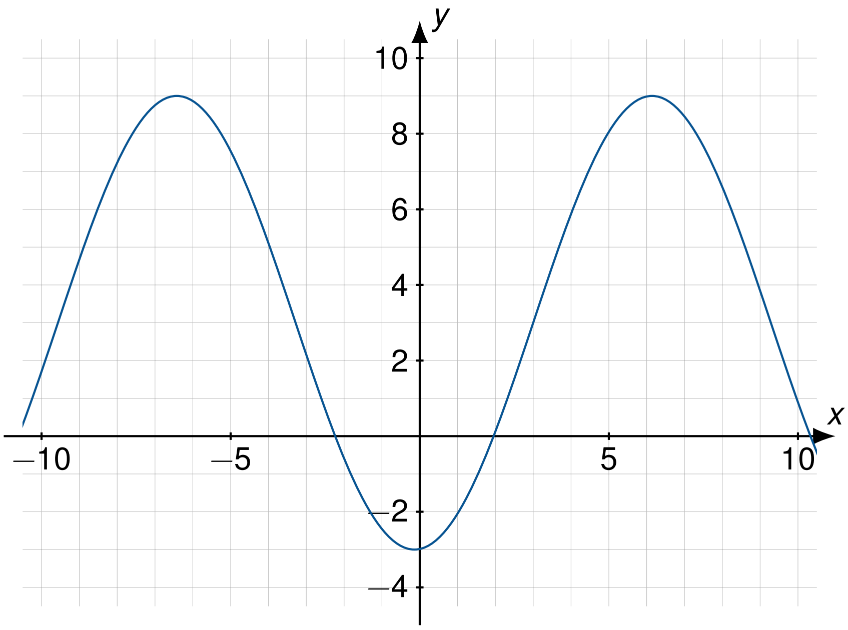
so liest man direkt ab:

$$\overline{AB} : \overline{BC} = 2a : a = 2 : 1.$$

Aufgabe G2

Gegeben ist der Graph einer Funktion

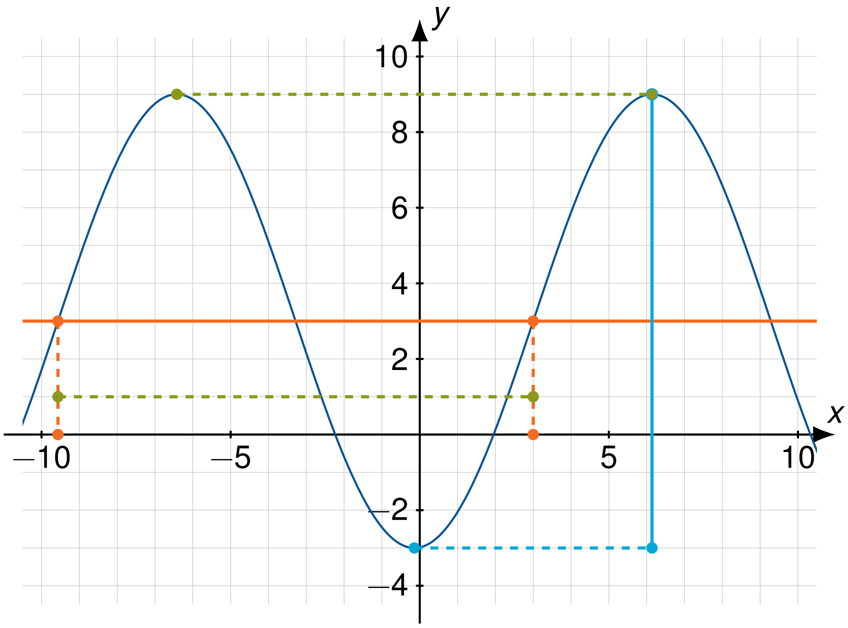
$$f(x) = a \cdot \sin\big(b(x - c)\big) + d.$$



Man schätze (so präzise wie anhand der Abbildung möglich) die Parameter a, b, c, d.

Hinweis: Eine Genauigkeit von 0,5 ist im Zweifel ausreichend.

Lösung



Die Amplitude a ist die halbe Differenz (blau) von maximalem und minimalem y-Wert. Also

$$a \approx \frac{9-(-3)}{2} = 6$$

Die Sinusschwingung schwingt symmetrisch um die x-Achse. Sie wurde hier um $d \approx 3$ nach oben verschoben.
Die Periode der normalen Sinusschwingung beträgt 2π. Die Priode der vorliegenden Funktion liest man ab aus dem Abstand von 2 Hochpunkten $(6-(-6{,}5) = 12{,}5 \approx 4\pi)$. Der Ablesefehler der x-Koordinate von Extremstellen ist aber relativ groß. Deshalb verwendet man besser den doppelten Abstand von 2 Schnittpunkten (grün) mit der um $d = 3$ verschobenen y-Achse (orange). Daher beträgt

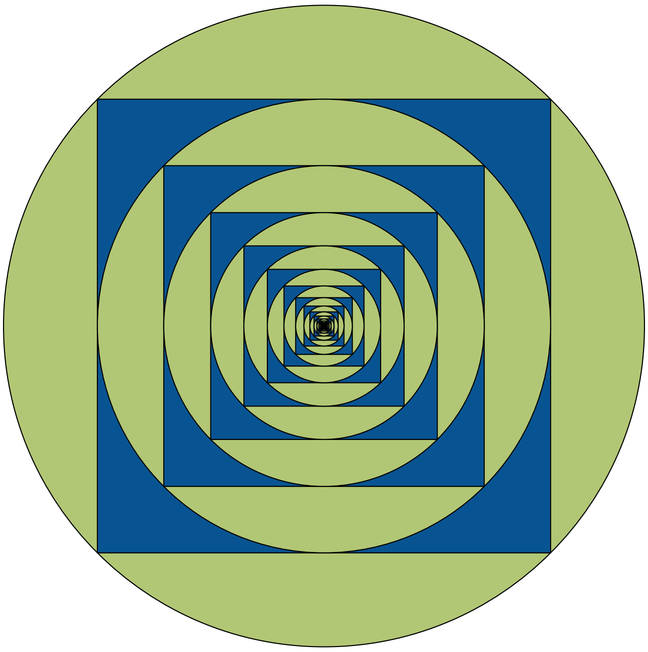
$$b \approx \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}.$$

Die Sinusfunktion geht durch den Ursprung und steigt dann an. Die Funktion muss also etwa um 3 nach links verschoben werden, damit die um 3 nach oben (oder $2k\pi - 3$ nach rechts) geschobene Sinusfunktion bei 3 die y-Achse schneidet. Also $c \approx 3$.

$$f(x) \approx 6\sin\left(\tfrac{1}{2}(x-3)\right) + 3.$$

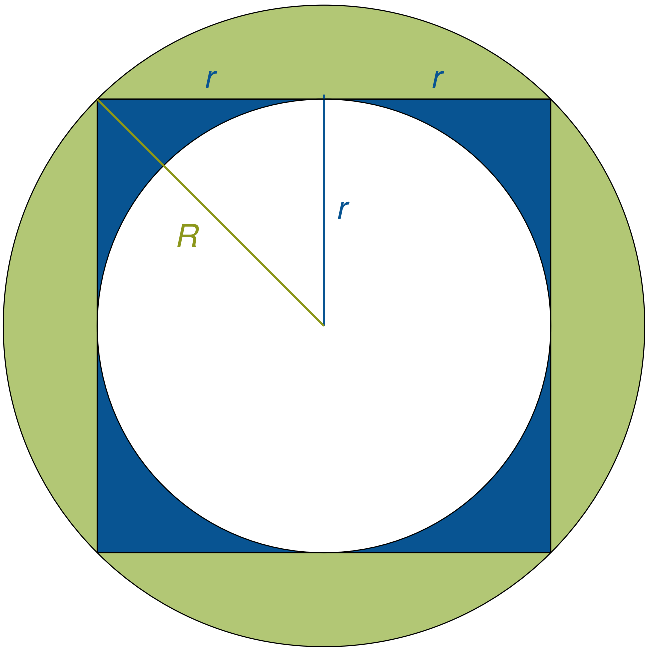
Aufgabe G3

In einen grünen Kreis mit Radius 1 Meter ist ein Quadrat einbeschrieben und blau gefärbt. In dieses Quadrat wird ein Kreis einbeschrieben und grün gefärbt. In diesen wieder ein Quadrat. Wir stellen uns vor, dass das immer so weiter geht.



Welcher Anteil der Fläche des großen Kreises ist dann grün gefärbt?

Lösung



Die Flächeninhalte der grün und blau gefärbten Flächen eines jeden Kreisringes stehen immer im gleichen Verhältnis, daher sind die Färbungsanteile in jedem Ring gleich und damit auch im gesamten Kreis. Es genügt daher den grünen Anteil am äußersten Ring zu berechnen.

Wenn der äußerste Kreis den Radius R hat und das Quadrat die Seitenlänge $2r$, dann hat der nächste Kreis den Radius r mit $r^2 + r^2 = R^2$ und es gilt:

$$
\begin{aligned}
F_K &= R^2\pi && \text{(Fläche großer Kreis)}\\
F_k &= r^2\pi && \text{(Fläche kleiner Kreis)}\\
F_Q &= (2r)^2 && \text{(Fläche Quadrat)}\\
F_g &= F_K - F_Q = R^2\pi - 4r^2 && \text{(grüne Fläche)}\\
F_b &= F_Q - F_k = 4r^2 - r^2\pi = r^2(4-\pi) && \text{(blaue Fläche)}\\
\frac{F_g}{F_g + F_b} &= \frac{F_g}{F_K - F_k} && \text{(Anteil grüne Fläche)}\\
&= \frac{R^2\pi - 4r^2}{R^2\pi - r^2\pi} = \frac{2r^2\pi - 4r^2}{2r^2\pi - r^2\pi}\\
&= \frac{2\pi - 4}{\pi} = 2 - \frac{4}{\pi}
\end{aligned}
$$

Aufgabe G4

Der Weihnachtsmann hat von seinen Wichteln eine Lichterkette mit 365 Lämpchen geschenkt bekommen. Die Lämpchen sind alle von 1 bis 365 nummeriert und können einzeln ein- und ausgeschaltet werden. An Heiligabend (24.12.) wird die Kette überreicht und alle Lämpchen leuchten. Am darauffolgenden ersten Weihnachtsfeiertag (25.12.) werden zunächst alle Lämpchen ausgeknipst. Am zweiten Tag nach Heiligabend wird jedes zweite Lämpchen wieder eingeschaltet. Am dritten Tag wird jedes dritte Lämpchen umgeschaltet, also ausgeknipst, wenn es leuchtete und angeknipst, wenn es aus war. Und so weiter. Am k-ten Tag nach Heiligabend wird jedes Lämpchen dessen Nummer durch k teilbar ist umgeschaltet.

a) Brennt das Lämpchen mit der Nummer 24 am nächsten Heiligabend?

b) Brennt das Lämpchen mit der Nummer 144 am nächsten Heiligabend?

c) Wieviele Lämpchen leuchten am nächsten Heiligabend **nicht**?

Lösung

Um zu entscheiden, ob eine Lampe mit Nummer n leuchtet, muss man die Anzahl der Teiler von n finden. Hat n eine gerade Anzahl von Teilern, ist sie an Heiligabend an, denn am ersten Tag wird sie ausgeknipst, dann bei jedem Teiler umgeschaltet und dann noch einmal am n-ten Tag. Bis Heiligabend, nach 365 Tagen, wurden dann alle Teiler gefunden.
Vorbemerkung/Vereinbarung:
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. Wir nennen dann n und 1 die *trivialen* Teiler von n, alle übrigen Teiler *echte* Teiler von n.

a) 24 hat die sechs echten Teiler $2, 3, 4, 6, 8, 12$. Deshalb leuchtet die Lampe mit der Nummer 24 (natürlich) zu Heiligabend.

b) $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 3^2$ hat die Teiler $2^i 3^k$ mit $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $k \in \{0, 1, 2\}$. Für die Wahl von i gibt es fünf, für die Wahl von k drei Möglichkeiten. Das ergibt $3 \cdot 5 = 15$ Kombinationen. Dabei sind die Kombinationen $2^0 3^0 = 1$ und $2^4 3^2 = 144$ keine echten Teiler. Die Zahl der echten Teiler ist also ungerade, also brennt Lampe 144 nicht.

c) Ob ein Lämpchen mit einer bestimmten Nummer leuchtet oder nicht, hängt offenbar alleine von der Anzahl seiner Teiler ab:

- Bei einer geraden Anzahl von (echten) Teilern leuchtet das Lämpchen am nächsten Heiligabend.
- Bei einer ungeraden Anzahl von (echten) Teilern leuchtet das Lämpchen am nächsten Heiligabend nicht.

Es gilt: Nur Quadratzahlen haben eine ungerade Anzahl von Teilern.
Begründung: Ist d ein Teiler von n, so ist auch $\frac{n}{d}$ ein Teiler von n.Die Anzahl der Teiler von n ist also gerade, es sei denn in einem Teilerpaar sind beide Teiler gleich. Das ist genau dann der Fall, wenn $\frac{n}{d} = d$ ist, also wenn $n = d^2$ eine Quadratzahl ist.
Da $19^2 = 361 < 365$, brennen am nächsten Heiligabend genau die 19 Birnchen mit den Nummern der ersten 19 Quadratzahlen nicht.
Alternativer Weg:
Sei n die Nummer einer Birne und

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

die Primfaktorzerlegung von n, dann sind genau die Zahlen m Teiler von n, die sich darstellen lassen als

$$m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}.$$

Dabei muss gelten: $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$. Für jedes m_i hat man also $n_i + 1$ Möglichkeiten und es gibt genau

$$\prod_{i=1}^{k} (n_i + 1)$$

mögliche Teiler (inklusive 1 und n).
Das Lämpchen brennt, wenn es geradzahlig viele Teiler hat und dazu genügt es, dass ein n_i ungerade ist. Das Lämpchen brennt nicht, wenn alle n_i gerade sind und das passiert genau, wenn n eine Quadratzahl ist.
Da $19^2 = 361 < 365$, brennen am nächsten Heiligabend genau die 19 Birnchen mit den Nummern der ersten 19 Quadratzahlen nicht.

Aufgabe E1

Für eine vierstellige Zahl *abcd* mit den Ziffern a, b, c und d betrachten wir:

- die Quersumme: $a+b+c+d$
- die alternierende Quersumme: $-a+b-c+d$
- und die gewichtete Quersumme: $4a+3b+2c+d$

Für die Zahl 2023 ist die Quersumme 7, die alternierende Quersumme -1 und die gewichtete Quersumme 15.
Finden Sie eine weitere vierstellige Zahl *abcd*, bei der die Quersumme, die alternierende Quersumme und die gewichtete Quersumme jeweils den selben Wert ergibt wie bei 2023. Wie viele solche Zahlen gibt es?

Hinweis: Bei einer vierstelligen Zahl *abcd* darf die erste Ziffer a nicht 0 sein.

Lösung

Die vier Ziffern a, b, c und d müssen das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a+b+c+d=7 \tag{1}$$
$$-a+b-c+d=-1 \tag{2}$$
$$4a+3b+2c+d=15 \tag{3}$$

Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} (1)+(2): &\quad 2b+2d=6 \Rightarrow b+d=3 \Rightarrow d=3-b \\ (1)-(2): &\quad 2a+2c=8 \Rightarrow a+c=4 \Rightarrow c=4-a \end{aligned}$$

Einsetzen in (3) ergibt:

$$\begin{aligned} & 4a+3b+8-2a+3-b=15 \\ \Rightarrow\quad & 2a+2b+11=15 \\ \Rightarrow\quad & a+b=2 \\ \Rightarrow\quad & b=2-a \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir, dass für a, b, c und d also gelten muss:

$$b=2-a, \qquad c=4-a \qquad \text{und} \qquad d=3-b=3-(2-a)=1+a$$

Nach Aufgabenstellung sind a, b, c und d Ziffern und es muss $a>0$ gelten. Aus $b=2-a$ folgt $a=1$ oder $a=2$, sonst wird b negativ. Wir erhalten für $a=2$ die

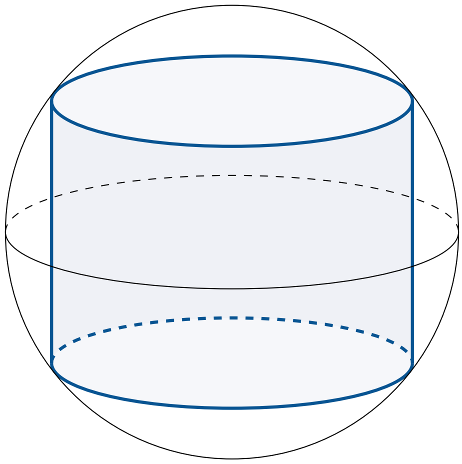
bekannte Lösung 2023. Für $a = 1$ erhalten wir die vierstellige Zahl 1132.
Die Probe

$$\begin{aligned} 1+1+3+2 &= 7 \\ -1+1-3+2 &= -1 \\ 4+3+6+2 &= 15 \end{aligned}$$

zeigt uns, dass dies tatsächlich eine Lösung ist. Somit gibt es genau zwei Zahlen, die die Bedingungen erfüllen.

Aufgabe E2

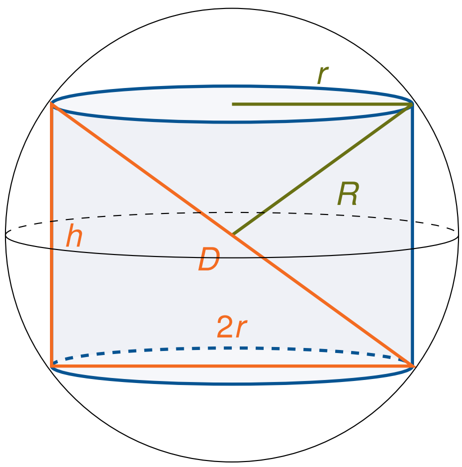
In einer kugelförmigen Tiefseetauchsonde mit Durchmesser 1 Meter soll ein möglichst großer zylinderförmiger Tank eingebaut werden.



Wie groß muss die Höhe des Zylinders gewählt werden, damit er ein maximales Volumen besitzt? Geben Sie für diesen Fall das Volumen konkret an.

Lösung

Der Durchmesser der Kugel sei $D = 2R = 1$ (in Metern), wenn R der Radius der Kugel ist. Der Radius des Zylinders sei r, seine Höhe sei h, dann ist das Volumen $V = r^2\pi h$.



Dabei gilt:

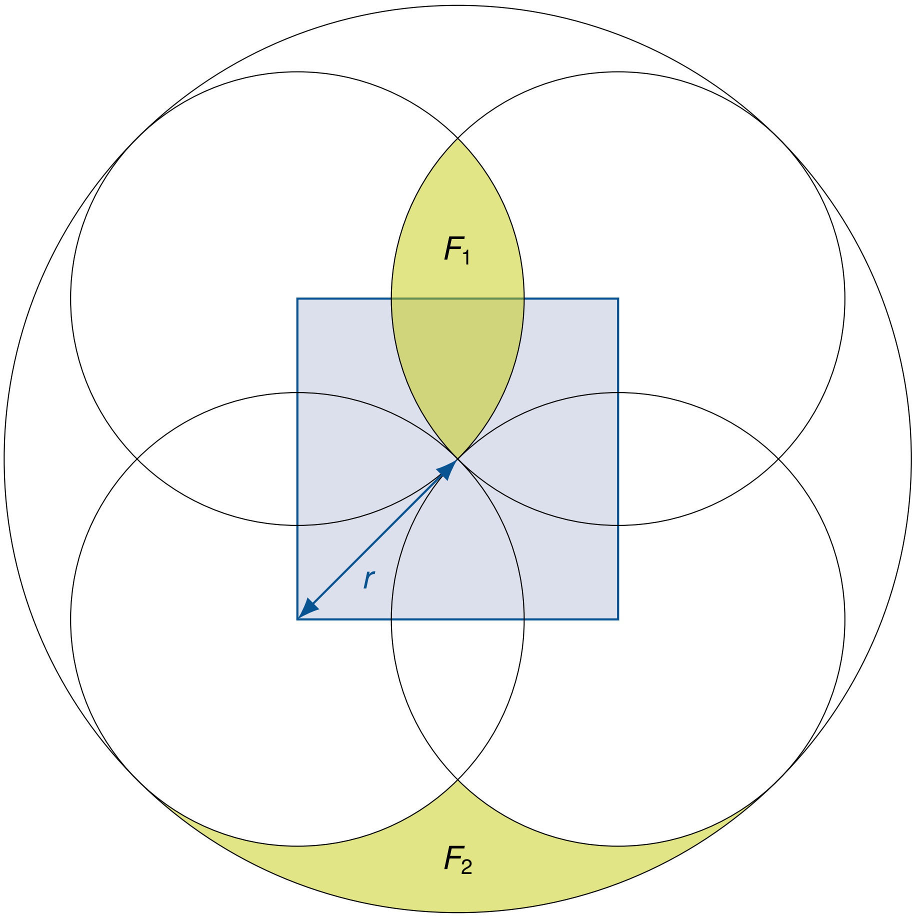
$$
\begin{aligned}
&& D^2 &= 4R^2 = 1m^2 = h^2 + (2r)^2 \\
\Rightarrow && r^2 &= \frac{1-h^2}{4} \\
&& V &= r^2\pi h = \frac{1-h^2}{4}\pi h = \frac{h-h^3}{4}\pi = V(h) \\
&& V'(h) &= \frac{1-3h^2}{4}\pi \\
&& V'(h) &= 0 \\
\Longleftrightarrow && h &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\Rightarrow && V &= r^2\pi h = \frac{h-h^3}{4}\pi = (1-h^2)\frac{h}{4}\pi = \frac{1}{6\sqrt{3}}\pi
\end{aligned}
$$

Alternativer Weg: Elimination von h statt r.

$$
\begin{aligned}
&& D^2 &= 4R^2 = 1m^2 = h^2 + (2r)^2 \\
\Rightarrow && h &= \sqrt{1-4r^2} \\
&& V &= r^2\pi h = r^2\pi\sqrt{1-4r^2} = V(r) \\
&& V'(r) &= 2r\pi\sqrt{1-4r^2} + r^2\pi\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-4r^2}}(-8r) \\
&& &= \frac{2r\pi(1-4r^2) - 4r^3\pi}{\sqrt{1-4r^2}} \\
&& V'(r) &= 0 \\
\Longleftrightarrow && 2r\pi(1-4r^2) &= 4r^3\pi \\
\overset{r\neq 0}{\Longleftrightarrow} && 1-4r^2 &= 2r^2 \\
\overset{r>0}{\Longleftrightarrow} && r &= \frac{1}{\sqrt{6}} \\
\Rightarrow && h &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&& V &= r^2\pi h = \frac{1}{6}\pi\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe E3

Gegeben sei ein Quadrat, dessen Diagonale Länge $2r$ hat. Um jeden der 4 Eckpunkte des Quadrats wird ein Kreis mit Radius r gezogen, außerdem um den Mittelpunkt des Quadrats ein Kreis mit Radius $2r$. Es entsteht die abgebildete Figur.



a) Zeigen Sie, dass die Flächenstücke F_1 und F_2 gleich groß sind.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von F_1 in Abhängigkeit von r.

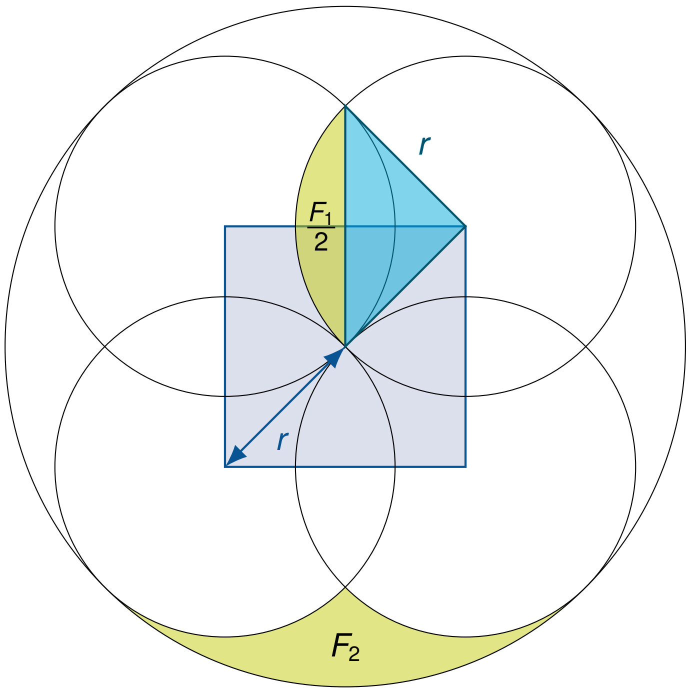
Lösung

a) Der Flächeninhalt der Vereinigung der vier kleinen Kreise ist

$$\begin{aligned} &4 \cdot (\text{Fläche eines kleinen Kreises}) - 4 \cdot F_1 \\ = \ &\text{Fläche des großen Kreises} - 4 \cdot F_2. \end{aligned}$$

Da die vier kleinen Kreise zusammen den gleichen Flächeninhalt wie der große haben (nämlich $4 \cdot r^2\pi = (2r)^2\pi$), sind F_1 und F_2 gleich groß.

b) Eine Hälfte von F_1 entsteht aus einem Viertel des kleinen Kreises, indem ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlänge r entfernt wird.



Also gilt

$$F_1 = 2 \cdot \left(\frac{r^2\pi}{4} - \frac{r^2}{2}\right) = r^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Aufgabe E4

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen 1, 2, 3 so anzuordnen, dass keine Zahl an ihrem Platz steht (also 1 nicht an erster Stelle, 2 nicht an zweiter, 3 nicht an dritter)?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 so anzuordnen, dass keine Zahl an ihrem Platz steht?

Lösung

a) Insgesamt gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Anordnungen (Permutationen) der drei Zahlen:

123	213	312
132	231	321

Es ist leicht zu sehen, dass nur die beiden Anordnungen 231 und 312 keine Fixpunkte haben.

b) Insgesamt gibt es $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ Anordnungen (Permutationen) von fünf Zahlen. Wir zählen die mit Fixpunkt und ziehen diese Zahl von 120 ab.
Für jede der fünf Zahlen 1,...,5 gibt es $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Anordnungen, die diese Zahl festlassen. Das sind zusammen $s_1 = 5 \cdot 24 = 120$ Anordnungen.
Dabei sind Anordnungen mit zwei Fixpunkten doppelt gezählt; davon gibt es für jedes Paar sechs Stück, zusammen also $s_2 = 10 \cdot 6 = 60$. Beispiel Ziffer 1 und 2 fest, Ziffer 3,4,5 beliebig.
Anordnungen mit 3 Fixpunkten sind in s_1 und in s_2 jeweils dreimal gezählt. (In s_1 für jede der 3 Ziffern und in s_2 für jede der 3 Ziffernpaare.)
Beispiel: 12354 taucht auf wenn 1 und 2 fix sind, aber auch wenn 1 und 3 fix sind oder 2 und 3.
In $s_1 - s_2$ wären sie also gar nicht berücksichtigt. Wir müssen also diese $s_3 = 10 \cdot 2 = 20$ wieder hinzufügen. Anordnungen mit vier oder fünf Fixpunkten gibt es nur eine, nämlich 12345. Diese ist in s_1 fünfmal und in s_2 und s_3 je zehnmal gezählt worden, in $s_1 - s_2 + s_3$ damit fünf Mal, also $s_4 = 4$ Mal zu oft. Wir haben also $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 = 76$ Anordnungen mit Fixpunkt.
Die gesuchte Anzahl ist damit $120 - 76 = 44$.

Für die Teilaufgabe b) folgen auf der nächsten Seite zwei alternative Lösungswege:

Alternativer Lösungsweg (Variante 1): Wir starten mit der Zahl 12345.

Fall 1: Ziffer 1 tauscht den Platz mit einer anderen Ziffer (4 Möglichkeiten), dann müssen die anderen drei Ziffern ihre Positionen untereinander so tauschen, dass keine auf ihrem Platz bleibt. Dafür gibt es 2 Möglichkeiten. Also insgesamt $4 \cdot 2 = 8$ Möglichkeiten (mit 1 im Zifferntausch).

Fall 2: Ziffer 1 wandert an den Platz einer anderen Ziffer (4 Möglichkeiten) und diese wandert an die Stelle einer dritten Ziffer (3 Möglichkeiten) und diese dritte Ziffer wandert an Position 1 (Dreierzyklus). Dann müssen die verbliebenen 2 Ziffern die Positionen tauschen. Das geht nur auf eine Weise. Also insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$ Möglichkeiten (mit 1 im Dreierzyklus).

Fall 3: Ziffer 1 wandert an den Platz einer anderen Ziffer (4 Möglichkeiten), diese wandert an die Stelle einer dritten Ziffer (3 Möglichkeiten) und diese dritte Ziffer wandert an die Position einer vierten Ziffer (2 Möglichkeiten). Die vierte Ziffer darf dann nicht an Position 1 gesetzt werden, weil sonst die fünfte Ziffer an ihrem Platz stehen bleiben muss. Die vierte Ziffer muss dann also ohne Wahlmöglichkeit an die Stelle der fünften Ziffer und diese dann an Position 1 (Fünferzyklus). Also insgesamt $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ Möglichkeiten (mit 1 im Fünferzyklus).

Alle drei Fälle zusammen ergeben dann $8 + 12 + 24 = 44$ Möglichkeiten.

Alternativer Lösungsweg (Variante 2)

z_n sei die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahlen 1, 2, …, n so anzuordnen, dass keine Zahl an ihrem Platz steht. Dann gilt:

$z_1 = 0;\ z_2 = 1;\ z_3 = 2$

Bei $n = 4$ gibt es unter allen n! Permutationen eine mit genau 4 Fixpunkten, 0 mit genau 3 Fixpunkten, $\binom{4}{2} z_2$ mit genau 2 Fixpunkten und $\binom{4}{1} z_3$ mit genau einem Fixpunkt, also ist $z_4 = 4! - 1 - 6 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 9$.

Entsprechend ist $z_5 = 5! - 1 - \binom{5}{3} z_2 - \binom{5}{2} z_3 - \binom{5}{1} z_4 = 120 - 1 - 10 \cdot 1 - 10 \cdot 2 - 5 \cdot 9 = 44$

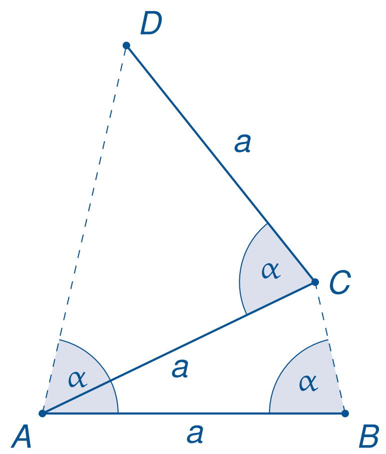
Bemerkung:

Definiert man $z_0 = 1$, so gilt für alle $n \geq 1$: $\quad z_n = n! - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{n-i} z_i$

Aufgabe H1

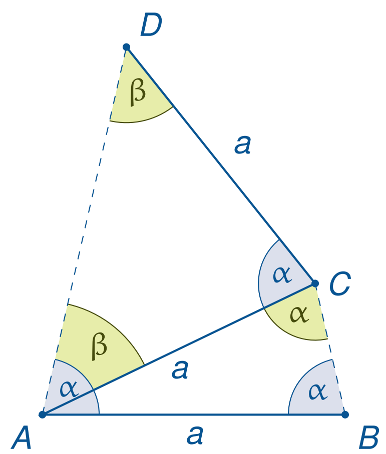
Drei Stäbe der Länge *a* werden so gelegt, dass entsprechend nachstehender Abbildung ein Viereck *ABCD* entsteht. Dabei tritt der Winkel α mehrfach auf.

Wie groß ist er?



Lösung

Das Dreieck *ABC* und das Dreieck *ACD* sind gleichschenklig, folglich sind die Basiswinkel gleich.



$\triangle ABC$:

$$
\begin{aligned}
(\alpha - \beta) + 2\alpha &= 180^\circ \\
\beta &= 3\alpha - 180^\circ \qquad (1)
\end{aligned}
$$

$\square ABCD$:

$$4\alpha + \beta = 360^\circ \tag{2}$$

$$4\alpha + 3\alpha - 180^\circ = 360^\circ \quad \text{(2) in (1)}$$

$$\alpha = \frac{540^\circ}{7} = \frac{3\pi}{7}$$

Aufgabe H2

Frieda hat eine Reise geplant, bei der sie bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h gerade noch rechtzeitig zu einem wichtigen Treffen ankommt. Wegen mehrerer Staus erreicht sie auf der ersten Hälfte der Strecke nur eine Durchschschnittsgeschwindigkeit von 40 km/h.

Wie schnell muss Frieda die zweite Hälfte der Strecke im Mittel mindestens zurücklegen, um noch rechtzeitig anzukommen?

Lösung

Die Lösung ist **nicht** 80 km/h, sondern 120 km/h.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit ist nicht das arithmetische Mittel der gefahrenen Geschwindigkeiten der beiden Streckenhälften. Braucht Frieda für die erste Streckenhälfte mit $v = 60$ km/h die Zeit T, so braucht sie bei 40 km/h die Zeit $t_1 = \frac{60}{40}T = \frac{3}{2}T$.
Es bleibt für die zweite Streckenhälfte statt T nur noch die Zeit $t_2 = 2T - t_1 = \frac{T}{2}$ übrig. Daher muss Frieda die zweite Streckenhälfte mit 120 km/h fahren.
Bei gleicher Gesamtdurchschnittszeit muss also für die Geschwindigkeiten gelten:

$$\begin{aligned}
& & 2T &= t_1 + t_2 = \frac{v}{v_1}T + \frac{v}{v_2}T \\
&\Rightarrow & 2T &= vT\left[\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right] = vT\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2} \\
&\Rightarrow & v &= \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}.
\end{aligned}$$

Dies ist das harmonische Mittel der Geschwindigkeiten auf den beiden Streckenhälften.

Aufgabe H3

Von einem Polynom

$$P(X) = 71 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

mit einer natürlichen Zahl n und **ganzzahligen** Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$ sei bekannt, dass eine natürliche Zahl $y \in \mathbb{N}$ existiert mit $y < 71$ und $P(y) = y$.

Man bestimme y.

Lösung

$$\begin{aligned} y &= P(y) = 71 + a_1 y + \cdots + a_n y^n \\ \Rightarrow 71 &= y\left(1 - a_1 - \cdots - a_n y^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Dabei ist die Klammer ganzzahlig und folglich ist 71 durch y teilbar. Da aber 71 eine Primzahl ist und $y < 71$, kommt nur $y = 1$ in Frage. Da es laut Aufgabenstellung mindestens eine Lösung gibt, ist diese $y = 1$.

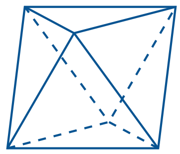
Bemerkung: Dabei müssen die Koeffizienten

$$P(1) = 71 + a_1 + \cdots + a_n \stackrel{!}{=} 1$$

erfüllen, sonst gibt es gar keine ganzzahlige Lösung.

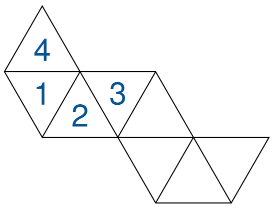
Aufgabe H4

Die Oberfläche eines Oktaeders besteht aus 8 Seitenflächen, die gleichseitige Dreiecke sind. Er hat 6 Ecken, 8 Flächen und 12 Kanten.

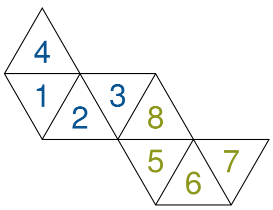


Bei einem Oktaederwürfel sind die acht dreieckigen Seitenflächen des Oktaeders so mit den Zahlen 1 bis 8 beschriftet, dass die Augensumme von gegenüberliegenden Seitenflächen immer gleich ist.

Ergänzen Sie die fehlenden Augenzahlen 5 bis 8 in dem unten abgebildeten Oktaedernetz, sodass daraus ein ordentlicher Oktaederwürfel gefaltet werden kann.

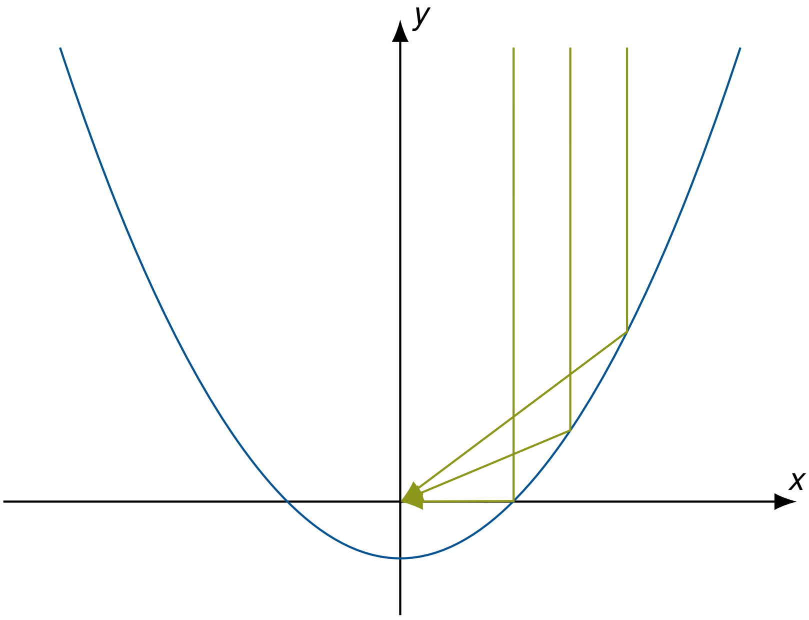


Lösung



Aufgabe H5

Eine Normalparabel $y = f(x) = x^2$ reflektiert alle senkrecht von oben kommenden Lichtstrahlen in einen Brennpunkt auf der y-Achse, wenn man sich den Graph der Parabel verspiegelt denkt (Parabolspiegel). Gesucht ist eine nach unten verschobene Normalparabel $y = f(x) = x^2 - a$, die alle senkrecht von oben kommenden Lichtstrahlen in den Koordinatenursprung reflektiert.

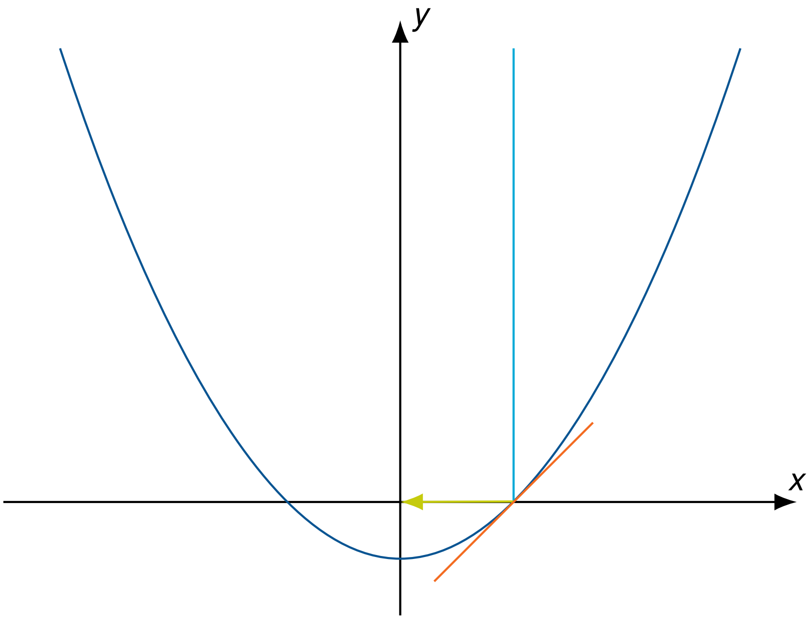


Wie groß ist die Verschiebung a zu wählen?

Hinweis: Die in der Aufgabenstellung genannte Reflexionseigenschaft der Normalparabel darf ohne Beweis verwendet werden.

Lösung

Da alle senkrecht einfallenden Strahlen zum Ursprung hin reflektiert werden müssen, genügt es, einen einfallenden Strahl zu reflektieren und den Schnittpunkt des reflektierten Strahles mit der y-Achse zu berechnen. Dieser Schnittpunkt muss dann der Ursprung sein. Wählt man dazu den Strahl (blau), der die Parabel an der positiven Nullstelle x_n trifft, muss er horizontal (grün) reflektiert werden. Die Rechnung wird dann besonders einfach.



Die Steigung der Parabel an der Nullstelle muss 45° betragen, also

$$f'(x_n) = 1 = \tan(45°).$$

(Man kann natürlich auch jeden anderen Strahl nehmen, nur werden dann die Rechnungen mühsamer.)
Damit gilt

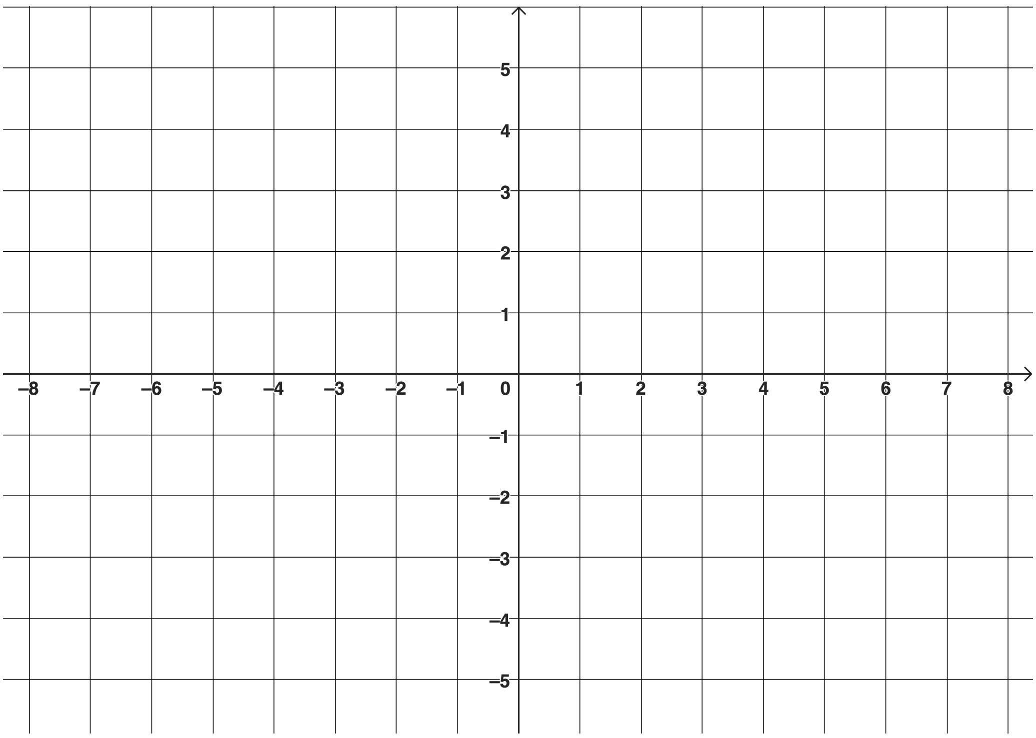
$$\begin{aligned} f(x_n) &= x_n^2 - a = 0 \\ f'(x_n) &= 2x_n = 1 \\ &\Rightarrow x_n = \tfrac{1}{2} \\ &\Rightarrow a = x_n^2 = \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Aufgabe H6

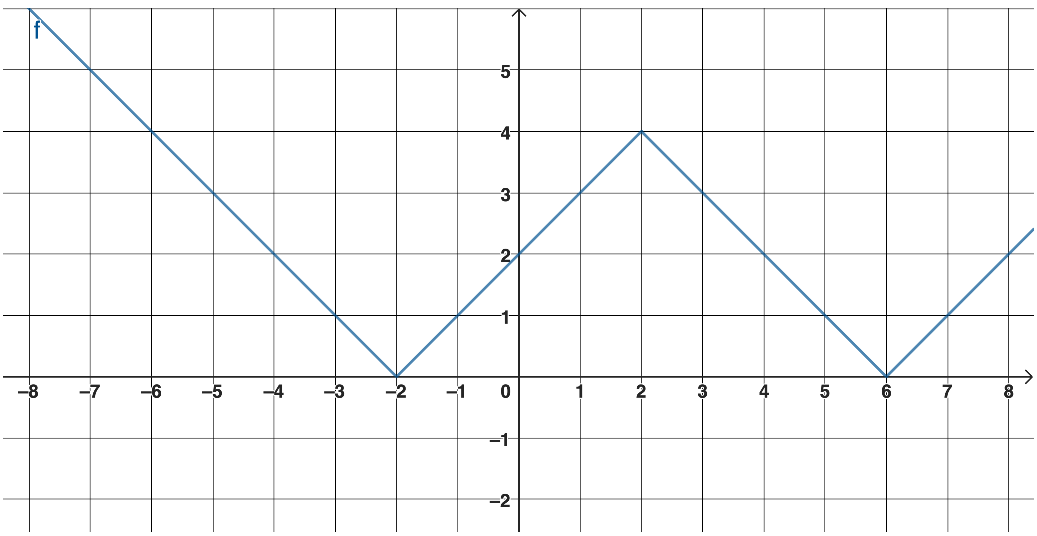
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \big||x-2|-4\big|$$

Skizzieren Sie das Schaubild von f im folgenden Koordinatensystem.



Lösung



Aufgabe H7

Eine k-stellige natürliche Zahl $n = z_1 z_2 \dots z_k$ mit den Ziffern $z_1, \dots, z_k$ heiße ziffernmonoton, wenn für benachbarte Ziffern stets gilt:

$$z_i < z_{i+1}.$$

Beispiel: 123579 ist ziffernmonoton, 12557 nicht da $z_3 = 5 \not< 5 = z_4$.

Wieviele 6-stellige ziffernmonotone natürliche Zahlen gibt es?

Lösung

Die Ziffern einer ziffernmonotonen Zahl sind alle verschieden. Die erste Ziffer kann nicht 0 sein, daher kommt 0 überhaupt nicht vor. Um eine 6-stellige ziffernmonotone Zahl zu erhalten wählt man also aus den Ziffern $\{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9\}$ beliebige 6 Ziffern aus und diese müssen dann der Größe nach angeordnet werden. Alternativ wählt man 3 Ziffern aus, die man nicht verwenden möchte. Dafür gibt es

$$\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

Möglichkeiten.

Alternativer Weg: Ohne Kenntnis von Kombinatorik.
Man wählt der Reihe nach 3 Ziffern aus, die man nicht verwenden möchte. Für die erste Ziffer hat man 9 Möglichkeiten, für die zweite 8 und für die dritte 7, also insgesamt $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ Möglichkeiten. Da es auf die Reihenfolge nicht ankommt, mit der die drei Ziffern gezogen werden, und drei Ziffern auf sechs Arten in verschiedener Reihenfolge gezogen werden können, muss man die erhaltene Zahl noch durch 6 teilen. Daher gibt es (ohne Beachtung der Reihenfolge) nur $504/6 = 84$ Möglichkeiten drei Ziffern zu wählen und die anderen sechs der Größe nach zu ordnen.

Zentrum für Mathematik · Tachauer Straße 4 · 36119 Neuhof · 06655-9176355
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe H8

Ein Stammbruch ist ein Bruch $\frac{1}{n}$ mit $2 \leqslant n \in \mathbb{N}$. Jeder Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a < b \in \mathbb{N}$ kann als Summe von verschiedenen Stammbrüchen dargestellt werden.
Beispiel:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

ist eine solche Stammbruchzerlegung. $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ ist hingegen nicht erlaubt.

Finden Sie eine Stammbruchzerlegung von $\frac{2}{5}$, das heißt schreiben Sie $\frac{2}{5}$ als Summe **verschiedener** Stammbrüche.

Lösung

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

Bemerkung: Die Lösung ist nicht eindeutig, aber die obige Lösung erhält man auf dem unten beschriebenen systematischen Weg. Andere Lösungen (es gibt unendlich viele) sind zum Beispiel

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$$

Lösungsweg:
Zu einem Bruch $\frac{Z}{N}$ sucht man zunächst den kleinsten Stammbruch $\frac{1}{n}$, der gerade noch größer oder gleich $\frac{Z}{N}$ ist. n erhält man durch Division ohne Rest ($n = N$ div Z). Ist der Rest Null, geht die Division auf und $\frac{Z}{N}$ kann zu dem Stammbruch $\frac{1}{n}$ gekürzt werden und man ist fertig. Ansonsten gilt:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{Z}{N} < \frac{1}{n}$$

und man zerlegt $\frac{Z}{N}$ in den Stammbruch $\frac{1}{n+1}$ und die Stammbruchzerlegung von

$\frac{Z}{N} - \frac{1}{n+1}$. Für $\frac{3}{7}$ bedeutete das beispielsweise

$$\begin{aligned}
7 \operatorname{div} 3 &= 2 \text{ (Rest 1)} \\
\frac{1}{3} \leqslant \frac{3}{7} &< \frac{1}{2} \\
\frac{3}{7} - \frac{1}{3} &= \frac{9-7}{21} = \frac{2}{21} \\
21 \operatorname{div} 2 &= 10 \text{ (Rest 1)} \\
\frac{1}{11} \leqslant \frac{2}{21} &< \frac{1}{10} \\
\frac{2}{21} - \frac{1}{11} &= \frac{22-21}{231} = \frac{1}{231} \\
\frac{3}{7} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Eine solche Zerlegung ist immer möglich. Die Zähler der Brüche werden bei dieser Methode immer kleiner, bis man bei einem Stammbruch ankommt.
Beweis: Sei

$$\frac{1}{n} < \frac{Z}{N} < \frac{1}{n-1},$$

dann gilt

$$nZ > N > (n-1)Z.$$

Man bildet nun

$$\frac{Z}{N} - \frac{1}{n} = \frac{nZ-N}{nN}.$$

Die Annahme $(nZ - N \geqslant Z)$ führt dann auf $((n-1)Z \geqslant N)$ und damit zum Widerspruch

$$\frac{1}{n-1} \leqslant \frac{Z}{N}.$$