Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase am 21. Februar 2024

1.

a) Die Diagonalen müssen orthogonal zueinander und gleich lang sein.

b) Aus $|BD| = |AC|$ folgt $a^2 + b^2 = (2-4)^2 + (8-2)^2 = 40$.
Steigung von AC : $\dfrac{8-2}{2-4} = -3$
Wegen $AC \perp BD$ gilt: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{3}$.
Somit folgt aus $a^2 + b^2 = 40$ und $a = 3b$: $a = 6$ und $b = 2$.

2.

a) Aus $8^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3-\sqrt{2}}$ folgt $x^{\frac{1}{3}} = \dfrac{7 \cdot (3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{2})} - 2^{\frac{1}{2}} = 3 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 3$
Und somit ist $x = 27$.

b) Aus $4^2 = 16 = a^b$ folgt $(a|b) \in \{(16|1); (4|2); (2|4)\}$.

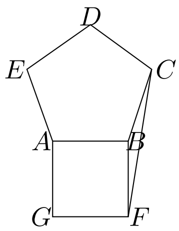
---

3. In einem regelmäßigen Fünfeck haben alle Innenwinkel die Größe $180° \cdot \frac{3}{5} = 108°$.

Das Dreieck FCB ist gleichschenklig, mit

$\angle FBC = 360° - 90° - 108° = 162°$.

Hieraus folgt: $\angle CBF = \dfrac{180° - 162°}{2} = 9°$.



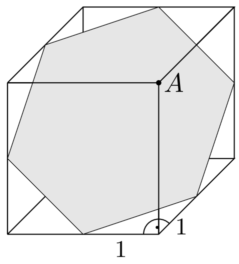
4. Aus $x = 2$ folgt: $3 \cdot f(2) + 2 \cdot f(-1) = 13$. Aus $x = -1$ folgt: $3 \cdot f(-1) + 2 \cdot f(2) = 7$.

Hieraus ergibt sich: $f(-1) = \dfrac{13 - 3f(2)}{2}$ und $f(-1) = \dfrac{7 - 2f(2)}{3} \quad \Rightarrow \quad f(2) = 5.$

---

5. a) Das Sechseck hat die Seitenlänge $a = \sqrt{2}$. Hieraus ergibt sich als Fläche des Sechsecks: $A = \dfrac{6 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}$.

b) Der Punkt A hat zu allen Eckpunkten des Sechsecks den selben Abstand. Hieraus folgt, dass die Raumdiagonale orthogonal zur Sechseckfläche ist.
Der Abstand zwischen Sechseckfläche und A ist somit:
$d = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3}$.

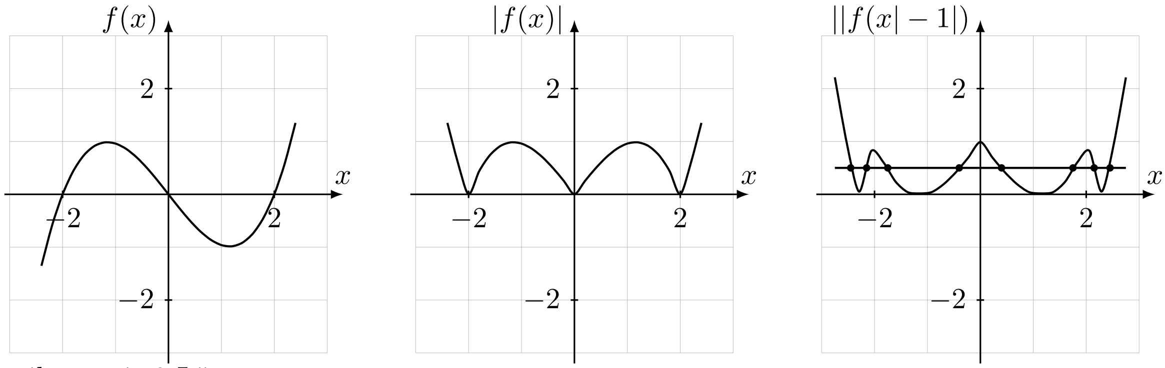


---

6. a) Der Scheitel der Parabel liegt genau dann auf der $x-$Achse, wenn die Parabel eine doppelte Nullstelle hat.

$$\Rightarrow x = \tfrac{b}{2} \pm \sqrt{\tfrac{b^2}{4} - 8} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{b^2}{4} - 8 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b = \pm 4\sqrt{2}.$$

b)



Es gibt somit 8 Lösungen.

7. Es gibt $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ Möglichkeiten 3 der 8 Punkte unter Berücksichtigung der Reihenfolge auszuwählen.
Da die Reihenfolge aber nicht berücksichtigt wird, ergeben sich $\dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ verschieden Dreiecke.

---

8. a) Ist s die Länge des Schulweges, so folgt aus der Zeitdifferenz: $\dfrac{s}{10} - \dfrac{S}{12} = \dfrac{2}{60}$
und somit $s = 2\ (km)$.

Ist t die Zeit, bei der er pünktlich ankommt, so gilt $10 \cdot \left(t + \frac{1}{60}\right) = 12 \cdot \left(t - \frac{1}{60}\right)$.
Hieraus folgt: $t = \frac{11}{60}\ (h)$ und $v = \dfrac{2}{\frac{11}{60}} \approx 10,9\ \left(\frac{km}{h}\right)$.

b) $2000 \cdot (1,2^0 + 1,2^1 + \cdots 1,2^{n-1}) > 55\,000 \ \Rightarrow\ \dfrac{1,2^n - 1}{1,2 - 1} > 27,5 \ \Rightarrow\ n \leq 11.$
Somit haben die Reparaturkosten die Anschaffungskosten nach 11 Jahren überschritten.