



© 2023 *Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

620841

Eine Straßenbahn fährt am Hauptbahnhof mit weiblichen und männlichen Fahrgästen ab. Beim ersten Halt danach steigt ein Drittel der weiblichen Fahrgäste aus und genauso viele männliche Fahrgäste steigen ein. Es steigen keine weiblichen Fahrgäste ein und keine männlichen Fahrgäste aus. Beim nächsten Halt steigt ein Drittel der männlichen Fahrgäste aus und genauso viele weibliche Fahrgäste steigen ein. Es steigen keine männlichen Fahrgäste ein und keine weiblichen Fahrgäste aus. Nach diesem Halt befinden sich zwei weibliche Fahrgäste mehr als männliche in der Straßenbahn und die Anzahl der männlichen Fahrgäste ist gleich der Anzahl der weiblichen Fahrgäste wie bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof.

Ermittle, wie viele männliche Fahrgäste und wie viele weibliche Fahrgäste bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof in der Straßenbahn gewesen sind.

620842

Beweise, dass für jedes konvexe Viereck $ABCD$ der Flächeninhalt des Vierecks $MTNS$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ASD und BCT ist, wobei M der Mittelpunkt der Seite \overline{AB} , N der Mittelpunkt der Seite \overline{CD} , S der Schnittpunkt der Strecken \overline{AN} und \overline{DM} sowie T der Schnittpunkt der Strecken \overline{BN} und \overline{CM} sind.

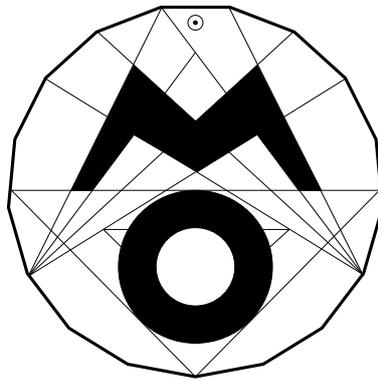
Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn jede seiner Seiten die Gerade durch die Eckpunkte der gegenüberliegenden Seite nicht schneidet.

620843

Mit einem üblichen Würfel mit den Augenzahlen von 1 bis 6 sollen jeweils durch achtmaliges Werfen des Würfels Augenzahlenfolgen der Länge 8 gebildet werden, die im Folgenden kurz Serien genannt werden. Zwei Serien sind genau dann gleich, wenn sie an allen 8 Stellen übereinstimmen.

Franz behauptet, dass es mehr Serien gibt, bei denen jeweils in irgendeiner Reihenfolge genau einmal die 1, genau zweimal die 2 und genau dreimal die 3 vorkommen, als Serien, bei denen jeweils in irgendeiner Reihenfolge genau viermal die 6 und keine Augenzahl genau zweimal vorkommen. Paul widerspricht.

Entscheide, wer von den beiden Recht hat, und begründe deine Entscheidung.





© 2023 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

620941

- Es seien a und b positive ganze Zahlen, jeweils mit Quersumme $Q(a) = Q(b) = 62$. Welche Werte kann die Quersumme von $a + b$ annehmen?
- Es sei a eine positive ganze Zahl mit Quersumme $Q(a) = 62$. Welche Werte kann die Quersumme von $2 \cdot a$ annehmen?

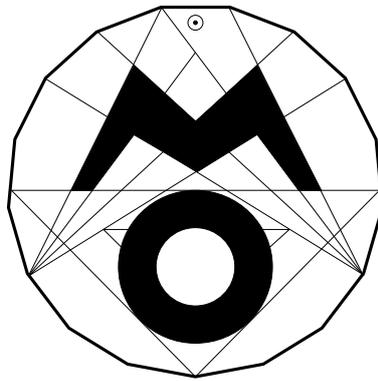
620942

Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man durch Umordnen der sieben Buchstaben des Wortes *KLAUSUR* bilden, bei denen keiner der Buchstaben mehr an der vorherigen Stelle steht, also K nicht an der ersten Stelle, L nicht an der zweiten, A nicht an der dritten, U weder an der vierten noch an der sechsten, S nicht an der fünften und R nicht an der siebenten Stelle?

620943

In die Ebene wird ein vollständiges Gitter aus Quadraten der Seitenlänge 1 gelegt.

- Welches ist die maximale Anzahl an Gitterquadraten, mit denen ein Quadrat Q der Seitenlänge 1 gemeinsame Punkte haben kann?
- Welches ist die maximale Anzahl an Gitterquadraten, mit denen ein Quadrat Q der Seitenlänge 1 gemeinsame innere Punkte haben kann?





© 2023 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

621041

- Es seien a und b positive ganze Zahlen, jeweils mit Quersumme $Q(a) = Q(b) = 62$. Welche Werte kann die Quersumme von $a + b$ annehmen?
- Es sei a eine positive ganze Zahl mit Quersumme $Q(a) = 62$. Welche Werte kann die Quersumme von $2 \cdot a$ annehmen?

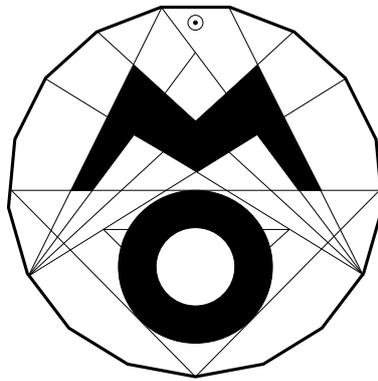
621042

Wie viele verschiedene Buchstabenfolgen kann man durch Umordnen der sieben Buchstaben des Wortes *KLAUSUR* bilden, bei denen keiner der Buchstaben mehr an der vorherigen Stelle steht, also K nicht an der ersten Stelle, L nicht an der zweiten, A nicht an der dritten, U weder an der vierten noch an der sechsten, S nicht an der fünften und R nicht an der siebenten Stelle?

621043

Gegeben ist ein Dreieck mit den Seitenlängen $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$ und $\sqrt{20}$.

- Bestimmen Sie die Länge der Höhe auf die längste Dreieckseite.
- Alle drei Eckpunkte des Dreiecks sollen auf dem Rand eines Quadrates liegen. Ermitteln Sie die kleinste Seitenlänge, die ein solches Quadrat haben kann.





© 2023 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

621141

Man bestimme alle Paare (m, n) ganzer Zahlen, für die $n \geq m$ gilt und die die Gleichung

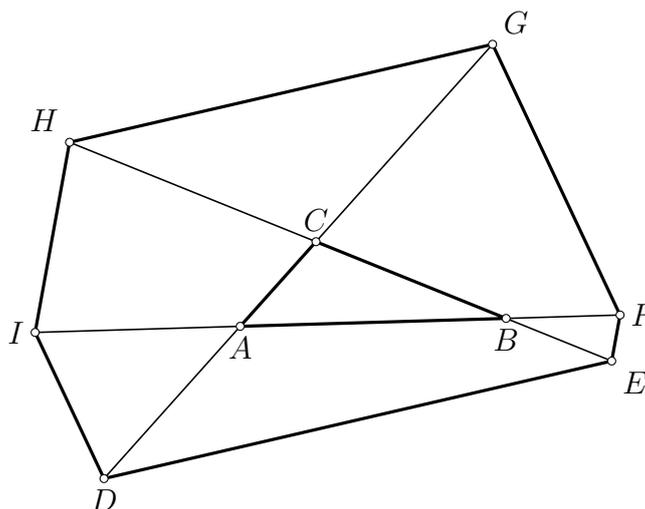
$$n^3 + m^3 - nm(n + m) = 2023 \quad (1)$$

erfüllen.

621142

Im Dreieck ABC werden die Seiten jeweils über beide Endpunkte hinaus nach außen um die Länge der Seite verlängert, die dem Eckpunkt gegenüberliegt.

Man beweise, dass der Flächeninhalt des dadurch entstehenden Sechsecks (siehe Abbildung A 621142, bezeichnet mit $DEFGHI$) mindestens das 13-fache des Flächeninhalts des Dreiecks ABC beträgt.



A 621142

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

621143

In einem Wettbewerb treten Teams verschiedener Schulen gegeneinander an. Jedes Schulteam besteht aus zwei Personen, und jedes Mitglied eines Schulteams soll in den drei Disziplinen Jonglieren, Singen und Kopfrechnen starten. Um sich für das Team zu qualifizieren, nehmen aus jeder Schule $n \geq 2$ interessierte Schülerinnen bzw. Schüler an Qualifikationswettbewerben teil, wobei sie in jeder der drei Disziplinen eine eindeutige Rangfolge feststellen. Bei der darauf folgenden Auswahl des Schulteams soll folgende Bedingung berücksichtigt werden:

(B) *Ist X eine Schülerin oder ein Schüler, die oder der am Qualifikationswettbewerb teilgenommen hat, aber nicht ins Schulteam aufgenommen wurde, so gibt es ein Mitglied Y im Schulteam, das X in mindestens zwei Disziplinen besiegt hat.*

Man bestimme alle Werte von $n \geq 2$, für die bei beliebiger Konstellation der Rangfolgen unter Beachtung der Bedingung **(B)** die Auswahl eines Teams möglich ist.



© 2023 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.

621241

Man bestimme alle Paare (m, n) ganzer Zahlen, für die $n \geq m$ gilt und die die Gleichung

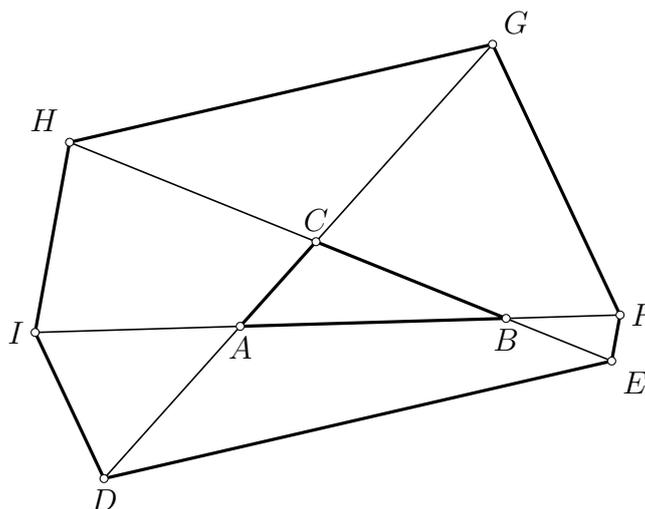
$$n^3 + m^3 - nm(n + m) = 2023 \quad (1)$$

erfüllen.

621242

Im Dreieck ABC werden die Seiten jeweils über beide Endpunkte hinaus nach außen um die Länge der Seite verlängert, die dem Eckpunkt gegenüberliegt.

Man beweise, dass der Flächeninhalt des dadurch entstehenden Sechsecks (siehe Abbildung A 621242, bezeichnet mit $DEFGHI$) mindestens das 13-fache des Flächeninhalts des Dreiecks ABC beträgt.



A 621242

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

621243

In einem Wettbewerb treten Teams verschiedener Schulen gegeneinander an. Jedes Schulteam besteht aus drei Personen, und jedes Mitglied eines Schulteams soll in den drei Disziplinen Jonglieren, Singen und Kopfrechnen starten. Um sich für das Team zu qualifizieren, nehmen aus jeder Schule $n \geq 3$ interessierte Schülerinnen bzw. Schüler an Qualifikationswettbewerben teil, wobei sie in jeder der drei Disziplinen eine eindeutige Rangfolge feststellen. Bei der darauf folgenden Auswahl des Schulteams soll folgende Bedingung berücksichtigt werden:

(B) *Ist X eine Schülerin oder ein Schüler, die oder der am Qualifikationswettbewerb teilgenommen hat, aber nicht ins Schulteam aufgenommen wurde, so gibt es ein Mitglied Y im Schulteam, das X in mindestens zwei Disziplinen besiegt hat.*

Man bestimme alle Werte von $n \geq 3$, für die bei beliebiger Konstellation der Rangfolgen unter Beachtung der Bedingung **(B)** die Auswahl eines Teams möglich ist.



620841 Lösung

6 Punkte

Erste Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der weiblichen Fahrgäste bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof mit w und die Anzahl der männlichen Fahrgäste bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof mit m .

Da beim ersten Halt nach der Abfahrt vom Hauptbahnhof ein Drittel der weiblichen Fahrgäste aussteigt und genauso viele männliche Fahrgäste zusteigen, aber keine weiblichen Fahrgäste ein- und keine männlichen Fahrgäste aussteigen, sind $(w - \frac{1}{3} \cdot w =) \frac{2}{3} \cdot w$ die Anzahl der weiblichen Fahrgäste und $m + \frac{1}{3} \cdot w$ die Anzahl der männlichen Fahrgäste in der Straßenbahn nach diesem Halt.

Da beim nächsten Halt ein Drittel der männlichen Fahrgäste aussteigt und genauso viele weibliche Fahrgäste einsteigen, aber keine männlichen Fahrgäste ein- und keine weiblichen Fahrgäste aussteigen, sind $(m + \frac{1}{3} \cdot w - \frac{1}{3} \cdot (m + \frac{1}{3} \cdot w) =) \frac{2}{3} \cdot m + \frac{2}{9} \cdot w$ die Anzahl der männlichen Fahrgäste und $(\frac{2}{3} \cdot w + \frac{1}{3} \cdot (m + \frac{1}{3} \cdot w) =) \frac{1}{3} \cdot m + \frac{7}{9} \cdot w$ die Anzahl der weiblichen Fahrgäste in der Straßenbahn nach diesem Halt.

Da sich jetzt zwei weibliche Fahrgäste mehr als männliche in der Straßenbahn befinden, gilt $\frac{1}{3} \cdot m + \frac{7}{9} \cdot w = \frac{2}{3} \cdot m + \frac{2}{9} \cdot w + 2$, daher $3 \cdot m + 7 \cdot w = 6 \cdot m + 2 \cdot w + 18$ und schließlich

$$5 \cdot w = 3 \cdot m + 18. \quad (1)$$

Da nach dem zweiten Halt die Anzahl der männlichen Fahrgäste gleich der Anzahl der weiblichen Fahrgäste wie bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof ist, gilt auch $\frac{2}{3} \cdot m + \frac{2}{9} \cdot w = w$ und daher

$$6 \cdot m = 7 \cdot w. \quad (2)$$

Aus (2) folgt $m = \frac{7}{6} \cdot w$. Hieraus und aus (1) folgen $5 \cdot w = 3 \cdot \frac{7}{6} \cdot w + 18$, $\frac{3}{2} \cdot w = 18$, $w = 12$ und $m = \frac{7}{6} \cdot 12 = 14$.

Bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof sind daher genau 12 weibliche und genau 14 männliche Fahrgäste in der Straßenbahn gewesen.

Zweite Lösung: Wir bezeichnen die Anzahl der männlichen Fahrgäste nach dem zweiten Halt nach der Abfahrt vom Hauptbahnhof mit x .

Die Anzahl der weiblichen Fahrgäste zu diesem Zeitpunkt ist um 2 größer als die Anzahl der männlichen Fahrgäste. Daher ist $x + 2$ die Anzahl der weiblichen Fahrgäste zu diesem Zeitpunkt.

Da beim zweiten Halt ein Drittel der vorherigen männlichen Fahrgäste ausstieg, aber auch keine männlichen Fahrgäste zusteigen, ist $\frac{3}{2} \cdot x$ die Anzahl der männlichen Fahrgäste vor dem zweiten Halt und $\frac{1}{2} \cdot x$ ist die Anzahl der männlichen Fahrgäste, die beim zweiten Halt ausstiegen. Da beim zweiten Halt die gleiche Anzahl an weiblichen Fahrgästen zusteig, aber

keine weiblichen Fahrgäste ausstiegen, ist $(x + 2 - \frac{1}{2} \cdot x) = \frac{1}{2} \cdot x + 2$ die Anzahl der weiblichen Fahrgäste vor dem zweiten Halt, also nach dem ersten Halt.

Da beim ersten Halt ein Drittel der vorherigen weiblichen Fahrgäste ausstieg, aber auch keine weiblichen Fahrgäste zustiegen, ist $(\frac{3}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot x + 2) =) \frac{3}{4} \cdot x + 3$ die Anzahl der weiblichen Fahrgäste vor diesem Halt, also bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof, und $\frac{1}{4} \cdot x + 1$ ist die Anzahl der weiblichen Fahrgäste, die ausstiegen. Da die gleiche Anzahl an männlichen Fahrgästen zustieg, aber keine männlichen Fahrgäste ausstiegen, ist $(\frac{3}{2} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot x - 1 =) \frac{5}{4} \cdot x - 1$ die Anzahl der männlichen Fahrgäste bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof.

Da die Anzahl der männlichen Fahrgäste nach dem zweiten Halt gleich der Anzahl der weiblichen Fahrgäste wie bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof ist, gilt $x = \frac{3}{4} \cdot x + 3$ und daher $x = 12$.

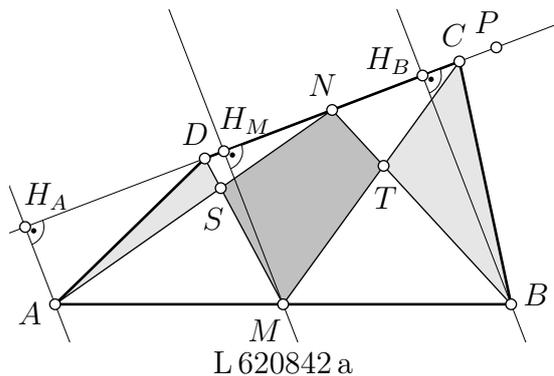
Bei der Abfahrt vom Hauptbahnhof sind daher genau 12 weibliche und genau $(\frac{5}{4} \cdot 12 - 1 =)$ 14 männliche Fahrgäste in der Straßenbahn gewesen.

620842 Lösung

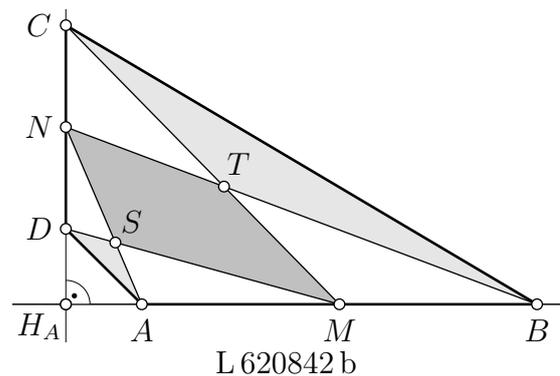
7 Punkte

Wir bezeichnen mit H_A den Fußpunkt des Lotes vom Punkt A auf die Gerade CD , mit H_B den Fußpunkt des Lotes vom Punkt B auf die Gerade CD und mit H_M den Fußpunkt des Lotes vom Punkt M auf die Gerade CD .

Fall 1: Die Geraden AB und CD stehen nicht senkrecht aufeinander. Dann gelten $H_A \neq H_B$ und $CD = H_A H_B$. Es sei P ein Punkt auf der Geraden $H_A H_B$ so, dass der Punkt H_B zwischen den Punkten H_A und P liegt.



L 620842 a



L 620842 b

Da das Viereck $ABCD$ konvex ist, schneidet die Seite \overline{AB} des Vierecks die Gerade CD nicht, siehe Abbildung L 620842 a, weshalb die Punkte A und B und daher auch M als Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} in derselben Halbebene bezüglich der Geraden $H_A H_B$ liegen und folglich die Winkel $\sphericalangle AH_A P$, $\sphericalangle MH_M P$ und $\sphericalangle BH_B P$ zueinander Stufenwinkel bilden, die nach Konstruktion der Punkte H_A , H_M , H_B und P rechte Winkel sind. Nach der Umkehrung des Stufenwinkelsatzes sind daher AH_A , MH_M und BH_B zueinander parallele Geraden. Daher ist $ABH_B H_A$ ein Trapez mit den zueinander parallelen Seiten $\overline{AH_A}$ und $\overline{BH_B}$. Da die Strecke \overline{AB} und die Gerade $H_A H_B (= CD)$ einander nicht schneiden, schneiden auch die Seiten \overline{AB} und $\overline{H_A H_B}$ einander nicht, weswegen das Trapez $ABH_B H_A$ auch konvex ist. Da M Mittelpunkt der Seite \overline{AB} ist und $MH_M \parallel AH_A$ gilt, ist die Strecke $\overline{MH_M}$ nach einer Umkehrung des Satzes über Mittellinien in Trapezen (siehe Aufgabe 620832) daher Mittellinie dieses Trapezes und es gilt

$$|\overline{MH_M}| = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AH_A}| + |\overline{BH_B}|). \quad (1)$$

Fall 2: Die Geraden AB und CD stehen senkrecht aufeinander. Dann gilt $H_A = H_M = H_B$. Da das Viereck $ABCD$ konvex ist, schneidet die Seite \overline{AB} des Vierecks die Gerade CD

nicht. Folglich liegt entweder der Punkt A zwischen den Punkten H_A und B oder der Punkt B zwischen den Punkten A und H_A . Durch Spiegelung an der Mittelsenkrechten der Strecke \overline{AB} und durch Bezeichnung der Bildpunkte von A, B, C und D in dieser Reihenfolge wieder mit B, A, D und C kann Ersteres erreicht werden. Da Flächeninhalte bei Spiegelungen erhalten bleiben, können wir daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass der Punkt A zwischen den Punkten H_A und B liegt, siehe Abbildung L 620842 b. Wegen $H_A = H_M = H_B$, $|\overline{BH_A}| = |\overline{AH_A}| + |\overline{AB}|$, $\frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| = |\overline{AM}|$ und $|\overline{MH_A}| = |\overline{AH_A}| + |\overline{AM}|$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AH_A}| + |\overline{BH_B}|) &= \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AH_A}| + |\overline{AH_A}| + |\overline{AB}|) = |\overline{AH_A}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \\ &= |\overline{AH_A}| + |\overline{AM}| = |\overline{MH_A}| = |\overline{MH_M}| \end{aligned}$$

und damit ebenfalls (1).

In jedem Fall gilt also (1).

Da der Punkt N nach Aufgabenstellung der Mittelpunkt der Seite \overline{CD} ist, gilt

$$|\overline{CN}| = |\overline{DN}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{CD}|. \quad (2)$$

Wir bezeichnen mit A_{XYZ} den Flächeninhalt eines Dreiecks XYZ und mit A_{WXYZ} den Flächeninhalt eines Vierecks $WXYZ$. Nach Wahl der Punkte H_A, H_B und H_M gilt

$$\begin{aligned} A_{CDM} &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{CD}| \cdot |\overline{MH_M}| \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \cdot |\overline{CD}| \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overline{AH_A}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{CD}| \cdot \frac{1}{2} \cdot |\overline{BH_B}| \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \cdot |\overline{DN}| \cdot |\overline{AH_A}| + \frac{1}{2} \cdot |\overline{CN}| \cdot |\overline{BH_B}| \end{aligned}$$

und daher

$$A_{CDM} = A_{AND} + A_{BCN}. \quad (3)$$

Da der Punkt S auf der Strecke \overline{AN} und der Punkt T auf der Strecke \overline{BN} liegen, gilt

$$A_{AND} = A_{ASD} + A_{DSN}, \quad A_{BCN} = A_{BCT} + A_{CNT}. \quad (4)$$

Da der Punkt S auf der Strecke \overline{DM} liegt und der Punkt T auf der Strecke \overline{CM} liegt, gilt

$$A_{CDM} = A_{MTNS} + A_{CNT} + A_{DSN}.$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} A_{MTNS} &= A_{CDM} - A_{CNT} - A_{DSN} \stackrel{(3)}{=} A_{AND} + A_{BCN} - A_{CNT} - A_{DSN} \\ &= A_{AND} - A_{DSN} + A_{BCN} - A_{CNT} \stackrel{(4)}{=} A_{ASD} + A_{BCT}. \end{aligned}$$

Folglich ist der Flächeninhalt des Vierecks $MTNS$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ASD und BCT , was zu beweisen war.

620843 Lösung

7 Punkte

Schritt 1: Wir berechnen die Anzahl aller Serien, also aller Augenzahlenfolgen der Länge 8, die in irgendeiner Reihenfolge genau einmal die 1, genau zweimal die 2 und genau dreimal die 3 enthalten.

Da 8 die Anzahl der Auswahlen von einer aus 8 Stellen für die Augenzahl 1 ist, können wir die Serien in genau 8 Mengen einteilen, wobei zwei Serien genau dann zu einer dieser Mengen gehören, wenn sie in der Stelle der Augenzahl 1 übereinstimmen.

Die Anzahl der Auswahlen ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge von 2 Stellen aus $(8-1 =)$ 7 Stellen für die Augenzahl 2 ist gleich der Anzahl C_2^7 der Kombinationen ohne Wiederholung von 2 aus 7 Stellen und wegen

$$C_2^7 = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

daher gleich 21. Folglich können wir die Serien auch in $8 \cdot 21$ Mengen einteilen, wobei zwei Serien genau dann zu einer dieser Mengen gehören, wenn sie in der Stelle der Augenzahl 1 und den beiden Stellen der Augenzahl 2 übereinstimmen.

Die Anzahl der Auswahlen ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge von 3 Stellen aus $(7-2 =)$ 5 Stellen für die Augenzahl 3 ist gleich der Anzahl C_3^5 der Kombinationen ohne Wiederholung von 3 aus 5 Stellen und wegen

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

daher gleich 10. Folglich können wir die Serien auch in $8 \cdot 21 \cdot 10$ Mengen einteilen, wobei zwei Serien genau dann zu einer dieser Mengen gehören, wenn sie in der Stelle der Augenzahl 1, den beiden Stellen der Augenzahl 2 und den drei Stellen der Augenzahl 3 übereinstimmen.

Die Serien in jeder dieser gerade erhaltenen Mengen sind jeweils dadurch festgelegt, welche der von 1, 2 und 3 verschiedenen Augenzahlen an den beiden verbliebenen Stellen stehen. Da für jede der beiden Stellen jeweils die drei Augenzahlen 4, 5 und 6 zu Verfügung stehen, enthält man diese Anzahl als die Anzahl $V_{2,W}^3$ der Variationen mit Wiederholung von 2 aus 3 Augenzahlen und wegen $V_{2,W}^3 = 3^2 = 9$ damit zu 9. Folglich enthält jede dieser $8 \cdot 21 \cdot 10$ Mengen genau 9 Serien.

Folglich ist $(8 \cdot 21 \cdot 10 \cdot 9 =)$ 15120 die Anzahl aller Serien aus genau 8 Augenzahlen, bei denen in irgendeiner Reihenfolge genau einmal die 1, genau zweimal die 2 und genau dreimal die 3 vorkommen.

Schritt 2: Wir berechnen nun die Anzahl aller Serien, also aller Augenzahlenfolgen der Länge 8, bei denen in irgendeiner Reihenfolge genau viermal die 6 und keine Augenzahl genau zweimal vorkommen.

Die Anzahl der Auswahlen ohne Wiederholung und ohne Beachtung der Reihenfolge von 4 Stellen aus 8 Stellen für die Stellen der Augenzahl 6 ist gleich der Anzahl C_4^8 der Kombinationen ohne Wiederholung von 4 aus 8 Stellen und wegen

$$C_4^8 = \binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

daher gleich 70. Folglich können wir die Serien in genau 70 Mengen einteilen, wobei zwei Serien genau dann in der gleichen Menge sind, wenn bei ihnen die vier Stellen der Augenzahl 6 gleich sind.

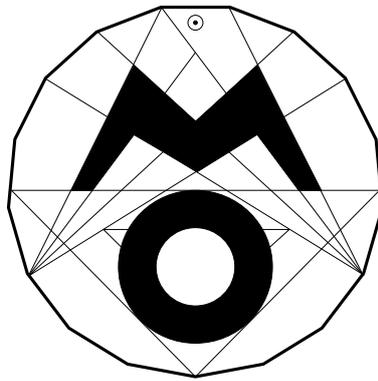
Jede dieser 70 Mengen von Serien kann nun in eine Teilmenge von Serien, bei denen eine von 6 verschiedene Augenzahl genau viermal vorkommt, in eine Teilmenge von Serien, bei denen eine von 6 verschiedene Augenzahl genau dreimal und eine von dieser Augenzahl und von 6 verschiedene Augenzahl genau einmal vorkommen, und in eine Teilmenge von Serien, bei denen vier von 6 verschiedene Augenzahlen jeweils genau einmal vorkommen, zerlegt werden.

- Bei jeder dieser 70 Mengen von Serien besteht die Teilmenge von Serien, bei denen eine von 6 verschiedene Augenzahl genau viermal vorkommt, aus genau $\binom{5}{1} =)$ 5 Serien, da diese von 6 verschiedene Zahl eine der fünf Augenzahlen 1, 2, 3, 4 und 5 ist.

- Bei jeder dieser 70 Mengen von Serien besteht die Teilmenge von Serien, bei denen jeweils eine von 6 verschiedene Augenzahl genau dreimal und eine von dieser Augenzahl und von 6 verschiedene Augenzahl genau einmal vorkommen, aus genau $\binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{1} = 5 \cdot 4 \cdot 4 =$ 80 Serien, da mit 1, 2, 3, 4 und 5 genau 5 Augenzahlen für die genau einmal vorkommende Augenzahl zur Auswahl stehen, für diese es genau 4 Auswahlen für die Stellen gibt, es dann noch genau 4 Auswahlen für die genau dreimal vorkommende Augenzahl gibt und die Stellen für diese Augenzahl schon festgelegt sind.
- Bei jeder dieser 70 Mengen von Serien besteht die Teilmenge von Serien, bei denen vier von 6 verschiedene Augenzahlen jeweils genau einmal vorkommen, aus genau 120 Serien, da die Anzahl der Anordnungen ohne Wiederholung von 4 der 5 Augenzahlen 1, 2, 3, 4 und 5 auf die vier Stellen gleich der Anzahl V_4^5 der Variationen ohne Wiederholung vierter Klasse von 5 Objekten ist und $V_4^5 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 120$ gilt.

Folglich besteht jede der 70 Mengen aus genau $(5 + 80 + 120 =)$ 205 Serien, weswegen es genau $(70 \cdot 205 =)$ 14 350 Serien gibt, bei denen jeweils in irgendeiner Reihenfolge genau viermal die Augenzahl 6 und keine Augenzahl genau zweimal vorkommen.

Wegen $15\,120 > 14\,350$ hat Franz Recht.





620941 Lösung

6 Punkte

Es gilt $Q(a + b) = Q(a) + Q(b) - 9 \cdot k$, wobei k die Anzahl der Überträge in der schriftlichen Addition $a + b$ bezeichnet. In der Tat, bei jedem Übertrag wird an einer Stelle eine Ziffernsumme, ggf. einschließlich vorhergehendem Übertrag, um 10 verkleinert und die Ziffernsumme an der nächsthöheren Stelle um den Übertrag 1 erhöht.

Teil a) Wegen $Q(a + b) \leq Q(a) + Q(b) = 124$ gilt $Q(a + b) = 124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$.

Umgekehrt treten diese Werte auch alle auf: Für $a = 34444445555555$ und $b = 355555544444445$ mit je sechs Vieren und sieben Fünfen als Ziffern hat die Summe $a + b$ die Quersumme 7 (und es treten $k = 13$ Überträge auf). Die Summe von $a = 5\dots 51\dots 1$ und $b = a$ mit k Fünfen und $62 - 5k$ Einsen für $k = 0, \dots, 12$ hat die Quersumme $124 - 9k$ (es treten k Überträge auf).

$Q(a + b)$ kann also genau alle Werte $124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$ annehmen.

Teil b) Wie im Teil a) muss $Q(2a) = 124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$ gelten. Weiterhin hatten wir im Teil a) schon gezeigt, dass es für ganzzahliges k und $0 \leq k \leq 12$ solche Beispiele gibt.

In der Zifferndarstellung der Zahl $2a$ sind Ziffern ohne Übertrag gerade, Ziffern mit Übertrag ungerade. In der Zifferndarstellung der Zahl a kann nur eine Ziffer $z \geq 5$ einen Übertrag hervorrufen. Für 13 Überträge müssen aber 13 solche Ziffern in dieser Zifferndarstellung vorkommen, woraus sich $Q(a) \geq 65$ ergibt.

$Q(2a)$ kann also genau alle Werte $124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 12$ annehmen.

620942 Lösung

7 Punkte

Wenn in der neuen Anordnung kein Buchstabe an seinem Platz steht, gibt es zwei Stellen $i, j \notin \{4, 6\}$, an denen jeweils ein U steht. Dafür gibt es $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten.

Wir fixieren diese Wahl.

Buchstabe k , $k = 1, 2, 3, 5, 7$, sei der Buchstabe, der anfangs an der Stelle k steht. So ist etwa A der Buchstabe 3. Es gibt keine „Buchstaben 4 oder 6“ (insbesondere ist U kein „Buchstabe k “).

Dass in der neuen Anordnung Buchstabe k nicht an der Stelle k stehen darf, bezeichnen wir als *Platzbedingung*.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die obige Anordnung mit fixierten $i, j \notin \{4, 6\}$ (den neuen Stellen für die beiden U) fortzusetzen. Dabei sind neben den Stellen 4 und 6 noch drei weitere Stellen a, b, c zu besetzen.

Fall 1: Die Buchstaben i, j stehen an den Stellen 4, 6. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten, denn für diese beiden Buchstaben ist die Platzbedingung automatisch erfüllt. Die restlichen drei Buchstaben a, b, c müssen dann an den Stellen a, b, c stehen, es ist aber die Platzbedingung zu berücksichtigen. Es sind genau die Anordnungen bca und cab möglich. Wir erhalten also $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten der Fortsetzung dieses Falls zu einer vollen Anordnung der Buchstaben.

Fall 2: Buchstabe i steht an der Stelle 4, Buchstabe a an der Stelle 6. Die restlichen drei Buchstaben b, c, j sind dann auf die Stellen a, b, c unter Berücksichtigung der Platzbedingung zu verteilen. Von den sechs möglichen Permutationen erfüllen genau drei diese Bedingung (bcj , jcb und cjb).

Tauschen wir die Rollen von i und j , von a mit b oder c sowie der Stellen 4 und 6, so ergeben sich dieselben Konstellationen von jeweils drei Fortsetzungen zu einer vollständigen Anordnung. Wir erhalten also $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ Möglichkeiten der Fortsetzung dieses Falls zu einer vollen Anordnung der Buchstaben.

Fall 3: Die Buchstaben a, b stehen an den Stellen 4, 6. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten, denn für diese beiden Buchstaben ist die Platzbedingung automatisch erfüllt. Die restlichen drei Buchstaben c, i, j sind auf die Stellen a, b, c unter Berücksichtigung der Platzbedingung zu verteilen. Von den sechs möglichen Permutationen erfüllen genau vier diese Bedingung (cij , cji , icj und jci).

Stehen statt a, b die Buchstaben a, c oder b, c an den Stellen 4, 6, so ergeben sich dieselben Konstellationen von jeweils vier Fortsetzungen zu einer vollständigen Anordnung. Wir erhalten also $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten der Fortsetzung dieses Falls zu einer vollen Anordnung der Buchstaben.

Da sich die betrachteten Fälle gegenseitig ausschließen und keine weiteren auftreten können, kommen wir insgesamt auf $10 \cdot (4 + 36 + 24) = 640$ Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Es sei $A(n, k)$ für ganzzahlige $n \geq k$, $n \geq 2$, $k \geq 0$ die Anzahl der Möglichkeiten, die Buchstaben eines Wortes der Form $UU A_1 A_2 \dots A_n$ (d.h. zwei gleiche und dann n hiervon und untereinander verschiedene Buchstaben) so anzuordnen, dass die Buchstaben U auf zwei Stellen ab der dritten stehen und für die Buchstaben A_1, \dots, A_k die Platzbedingung erfüllt ist, während die Buchstaben A_{k+1}, \dots, A_n frei in ihrer Platzwahl sind. Dann ist zur Lösung der Aufgabe $A(5, 5)$ zu bestimmen.

Es gilt $A(2, k) = 2$ für $k \in \{0, 1, 2\}$, da hier stets U auf die hinteren beiden Stellen zu setzen ist und für die Reihenfolge von A_1 und A_2 auf den ersten beiden Stellen keine Einschränkung existiert, da die Platzbedingung automatisch erfüllt ist.

Weiter gilt $A(n, 0) = \binom{n}{2} \cdot n!$ für ganzzahliges $n \geq 2$, denn für die beiden U können $\binom{n}{2}$ Stellen gewählt werden, auf die restlichen n Stellen können A_1, \dots, A_n in beliebiger Permutation verteilt werden, da für $k = 0$ keine weitere Einschränkung zu berücksichtigen ist.

Schließlich gilt $A(n, k) = A(n, k-1) - A(n-1, k-1)$ für ganzzahlige $n \geq 3$ und $n \geq k \geq 1$, denn $A(n, k-1)$ zählt die Anordnungen, bei denen die Platzierung von A_k an beliebiger Stelle erfolgen kann, $A(n-1, k-1)$ die Anordnungen, bei denen A_k an seiner Stelle $k+2$ bleibt, was äquivalent zur Aufgabe ist, die zwei U und die restlichen $A_i, i \neq k$ anzuordnen.

Wir erhalten damit für $A(n, k)$ die folgenden Werte:

n	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
5	1200	1056	930	820	724	640
4	144	126	110	96	84	
3	18	16	14	12		
2	2	2	2			

Dabei wurden zunächst die untere Zeile und die linke Spalte ausgefüllt und dann die weiteren Werte in der Tabelle von links unten nach rechts oben entsprechend der Rekursionsformel berechnet.

Die Antwort auf die Aufgabenstellung lautet also $A(5, 5) = 640$.

620943 Lösung

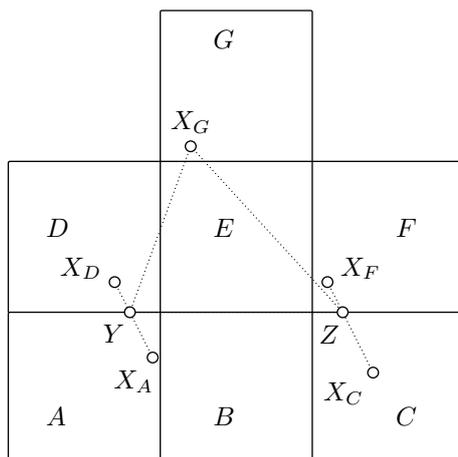
7 Punkte

Teil a) Das Quadrat Q kann nur mit Gitterquadraten aus maximal drei Zeilen Punkte gemeinsam haben, denn Zeile n und $n + 3$ haben Abstand 2, welcher größer als der maximale Abstand $\sqrt{2}$ zweier Punkte von Q ist. Diese Zeilen können also nicht beide Punkte von Q enthalten. Gleiches gilt für die Gitterspalten. Somit ergibt sich, dass Q mit nicht mehr als drei mal drei Gitterquadraten gemeinsame Punkte haben kann. Stimmt Q mit einem der Gitterquadrate überein, dann wird die Maximalanzahl 9 aber erreicht.

Teil b) Es ist nicht schwer, ein Quadrat Q zu finden, welches mit sechs Gitterquadraten gemeinsame innere Punkte besitzt, z.B. mit einer Diagonale auf einer der Gitterlinien, wo der Diagonalenmittelpunkt von Q mit dem Mittelpunkt einer Gitterquadratseite übereinstimmt.

Wir zeigen, dass dies die Maximalzahl ist. Für ein beliebig gelegenes Quadrat Q wählen wir ein Gitterquadrat E , in dessen Innerem oder auf dessen Rand der Mittelpunkt von Q liegt. Da jeder Punkt von Q von diesem Mittelpunkt einen Abstand höchstens von $\frac{1}{2}\sqrt{2} < 1$ hat, wird Q von den drei mal drei Gitterquadraten mit E als Zentrum wie aus Teil a) komplett überdeckt.

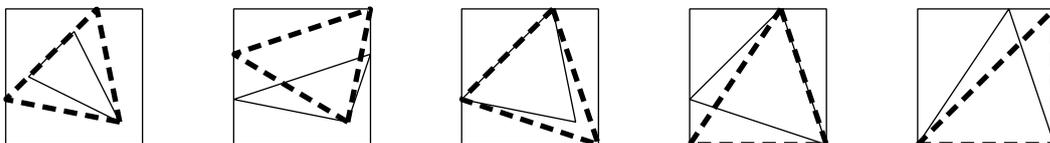
Von diesen neun Gitterquadraten haben innere Punkte in diagonal gegenüberliegenden Gitterquadraten einen Abstand größer als $\sqrt{2}$. Q kann also nicht mit zwei solchen Gitterquadraten gemeinsame innere Punkte haben. Somit bleibt (bis auf Symmetrie) eine Figur aus sieben Gitterquadraten übrig wie in Abbildung L620943 a, und es stellt sich die Frage, ob es ein Q gibt, welches mit jedem der Gitterquadrate aus dieser Figur gemeinsame innere Punkte haben kann. Wir bezeichnen die sieben Gitterquadrate mit A bis G wie in der Abbildung und betrachten die Figur so, dass G oben liegt.



L 620943 a

Im Folgenden nutzen wir, dass ein Quadrat konvex ist und deshalb jede Strecke zwischen zweien seiner Punkte ganz in ihm enthalten ist. Es seien X_A, X_B, \dots, X_G Punkte, die jeweils im Inneren von A, B, \dots bzw. G und auch im Inneren von Q liegen. Weiter sei Y der Schnittpunkt der Strecke $\overline{X_A X_D}$ mit der Geraden durch die untere Seite von E und Z der Schnittpunkt der Strecke $\overline{X_C X_F}$ mit der Geraden durch die untere Seite von E . Dann liegen Y und Z in Q , und zwar Y links von E und Z rechts von E , also gilt $|\overline{YZ}| > 1$. Außerdem liegt X_G oberhalb der oberen Seite von E und deshalb ist im Dreieck $X_G Y Z$ die Höhe von X_G auf YZ länger als 1. Folglich ist der Flächeninhalt des Dreiecks $X_G Y Z$ größer als $\frac{1}{2}$. Andererseits liegt das Dreieck ganz in Q , nach Aufgabe 620924 beträgt sein Flächeninhalt deshalb höchstens $\frac{1}{2}$. Das ist ein Widerspruch. Also kann es kein Quadrat geben, das mit mehr als 6 Gitterquadraten gemeinsame innere Punkte hat. Die gesuchte Maximalzahl ist also 6.

Anmerkung: In Aufgabe 620924 wurde gezeigt, dass ein Dreieck, das in einem Quadrat der Seitenlänge 1 vollständig enthalten ist, maximal den Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ haben kann. Dazu zeigt man zum Beispiel, dass in jedem der Piktogramme in der Abbildung L 620943 b je nach Ausgangslage die Dreiecke immer größer werden – entweder wird die Basis bei gleicher Höhenlänge länger oder die Höhe wird länger bei gleichbleibender Basislänge – bis zum maximalen Flächeninhalt in der rechten Abbildung.



L 620943 b



621041 Lösung

6 Punkte

Es gilt $Q(a + b) = Q(a) + Q(b) - 9 \cdot k$, wobei k die Anzahl der Überträge in der schriftlichen Addition $a + b$ bezeichnet. In der Tat, bei jedem Übertrag wird an einer Stelle eine Ziffernsumme, ggf. einschließlich vorhergehendem Übertrag, um 10 verkleinert und die Ziffernsumme an der nächsthöheren Stelle um den Übertrag 1 erhöht.

Teil a) Wegen $Q(a + b) \leq Q(a) + Q(b) = 124$ gilt $Q(a + b) = 124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$.

Umgekehrt treten diese Werte auch alle auf: Für $a = 34444445555555$ und $b = 355555544444445$ mit je sechs Vieren und sieben Fünfen als Ziffern hat die Summe $a + b$ die Quersumme 7 (und es treten $k = 13$ Überträge auf). Die Summe von $a = 5\dots 51\dots 1$ und $b = a$ mit k Fünfen und $62 - 5k$ Einsen für $k = 0, \dots, 12$ hat die Quersumme $124 - 9k$ (es treten k Überträge auf).

$Q(a + b)$ kann also genau alle Werte $124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$ annehmen.

Teil b) Wie im Teil a) muss $Q(2a) = 124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 13$ gelten. Weiterhin hatten wir im Teil a) schon gezeigt, dass es für ganzzahliges k und $0 \leq k \leq 12$ solche Beispiele gibt.

In der Zifferndarstellung der Zahl $2a$ sind Ziffern ohne Übertrag gerade, Ziffern mit Übertrag ungerade. In der Zifferndarstellung der Zahl a kann nur eine Ziffer $z \geq 5$ einen Übertrag hervorrufen. Für 13 Überträge müssen aber 13 solche Ziffern in dieser Zifferndarstellung vorkommen, woraus sich $Q(a) \geq 65$ ergibt.

$Q(2a)$ kann also genau alle Werte $124 - 9k$ mit ganzzahligem k und $0 \leq k \leq 12$ annehmen.

621042 Lösung

7 Punkte

Wenn in der neuen Anordnung kein Buchstabe an seinem Platz steht, gibt es zwei Stellen $i, j \notin \{4, 6\}$, an denen jeweils ein U steht. Dafür gibt es $\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten.

Wir fixieren diese Wahl.

Buchstabe k , $k = 1, 2, 3, 5, 7$, sei der Buchstabe, der anfangs an der Stelle k steht. So ist etwa A der Buchstabe 3. Es gibt keine „Buchstaben 4 oder 6“ (insbesondere ist U kein „Buchstabe k “).

Dass in der neuen Anordnung Buchstabe k nicht an der Stelle k stehen darf, bezeichnen wir als *Platzbedingung*.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die obige Anordnung mit fixierten $i, j \notin \{4, 6\}$ (den neuen Stellen für die beiden U) fortzusetzen. Dabei sind neben den Stellen 4 und 6 noch drei weitere Stellen a, b, c zu besetzen.

Fall 1: Die Buchstaben i, j stehen an den Stellen 4, 6. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten, denn für diese beiden Buchstaben ist die Platzbedingung automatisch erfüllt. Die restlichen drei Buchstaben a, b, c müssen dann an den Stellen a, b, c stehen, es ist aber die Platzbedingung zu berücksichtigen. Es sind genau die Anordnungen bca und cab möglich. Wir erhalten also $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten der Fortsetzung dieses Falls zu einer vollen Anordnung der Buchstaben.

Fall 2: Buchstabe i steht an der Stelle 4, Buchstabe a an der Stelle 6. Die restlichen drei Buchstaben b, c, j sind dann auf die Stellen a, b, c unter Berücksichtigung der Platzbedingung zu verteilen. Von den sechs möglichen Permutationen erfüllen genau drei diese Bedingung (bcj , jcb und cjb).

Tauschen wir die Rollen von i und j , von a mit b oder c sowie der Stellen 4 und 6, so ergeben sich dieselben Konstellationen von jeweils drei Fortsetzungen zu einer vollständigen Anordnung. Wir erhalten also $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ Möglichkeiten der Fortsetzung dieses Falls zu einer vollen Anordnung der Buchstaben.

Fall 3: Die Buchstaben a, b stehen an den Stellen 4, 6. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten, denn für diese beiden Buchstaben ist die Platzbedingung automatisch erfüllt. Die restlichen drei Buchstaben c, i, j sind auf die Stellen a, b, c unter Berücksichtigung der Platzbedingung zu verteilen. Von den sechs möglichen Permutationen erfüllen genau vier diese Bedingung (cij , cji , icj und jci).

Stehen statt a, b die Buchstaben a, c oder b, c an den Stellen 4, 6, so ergeben sich dieselben Konstellationen von jeweils vier Fortsetzungen zu einer vollständigen Anordnung. Wir erhalten also $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten der Fortsetzung dieses Falls zu einer vollen Anordnung der Buchstaben.

Da sich die betrachteten Fälle gegenseitig ausschließen und keine weiteren auftreten können, kommen wir insgesamt auf $10 \cdot (4 + 36 + 24) = 640$ Möglichkeiten.

Lösungsvariante: Es sei $A(n, k)$ für ganzzahlige $n \geq k$, $n \geq 2$, $k \geq 0$ die Anzahl der Möglichkeiten, die Buchstaben eines Wortes der Form $UUA_1A_2 \dots A_n$ (d.h. zwei gleiche und dann n hiervon und untereinander verschiedene Buchstaben) so anzuordnen, dass die Buchstaben U auf zwei Stellen ab der dritten stehen und für die Buchstaben A_1, \dots, A_k die Platzbedingung erfüllt ist, während die Buchstaben A_{k+1}, \dots, A_n frei in ihrer Platzwahl sind. Dann ist zur Lösung der Aufgabe $A(5, 5)$ zu bestimmen.

Es gilt $A(2, k) = 2$ für $k \in \{0, 1, 2\}$, da hier stets U auf die hinteren beiden Stellen zu setzen ist und für die Reihenfolge von A_1 und A_2 auf den ersten beiden Stellen keine Einschränkung existiert, da die Platzbedingung automatisch erfüllt ist.

Weiter gilt $A(n, 0) = \binom{n}{2} \cdot n!$ für ganzzahliges $n \geq 2$, denn für die beiden U können $\binom{n}{2}$ Stellen gewählt werden, auf die restlichen n Stellen können A_1, \dots, A_n in beliebiger Permutation verteilt werden, da für $k = 0$ keine weitere Einschränkung zu berücksichtigen ist.

Schließlich gilt $A(n, k) = A(n, k-1) - A(n-1, k-1)$ für ganzzahlige $n \geq 3$ und $n \geq k \geq 1$, denn $A(n, k-1)$ zählt die Anordnungen, bei denen die Platzierung von A_k an beliebiger Stelle erfolgen kann, $A(n-1, k-1)$ die Anordnungen, bei denen A_k an seiner Stelle $k+2$ bleibt, was äquivalent zur Aufgabe ist, die zwei U und die restlichen $A_i, i \neq k$ anzuordnen.

Wir erhalten damit für $A(n, k)$ die folgenden Werte:

n	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
5	1200	1056	930	820	724	640
4	144	126	110	96	84	
3	18	16	14	12		
2	2	2	2			

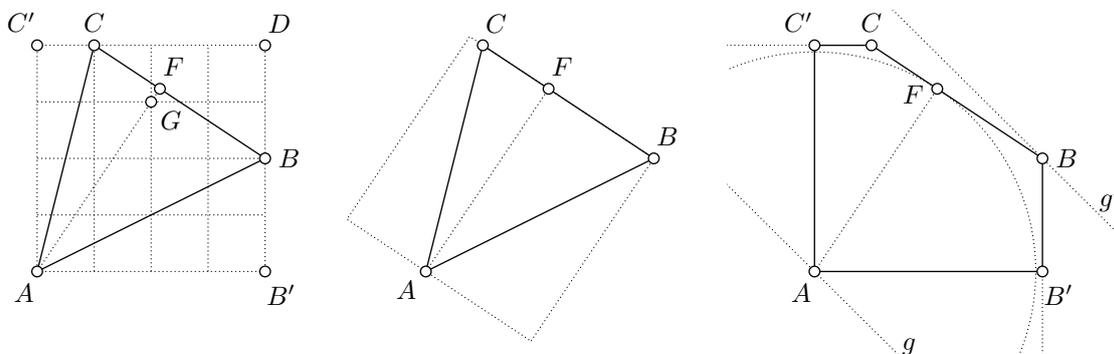
Dabei wurden zunächst die untere Zeile und die linke Spalte ausgefüllt und dann die weiteren Werte in der Tabelle von links unten nach rechts oben entsprechend der Rekursionsformel berechnet.

Die Antwort auf die Aufgabenstellung lautet also $A(5, 5) = 640$.

621043 Lösung

7 Punkte

Erste Lösung:



L 621043 a

Das Gitterpunktdreieck (Gitterquadrate sind Einheitsquadrate) in Abbildung L 621043 a links hat wegen des Satzes des Pythagoras die Seitenlängen $|\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, $|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ und $|\overline{BC}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, stellt also das gegebene Dreieck in einem 4×4 -Quadrat $AB'DC'$ dar. Da sich dieses Quadrat aus dem Dreieck ABC sowie den rechtwinkligen Dreiecken ACC' , CBD und BAB' zusammensetzt, ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich $16 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 7$.

Mit dieser Erkenntnis ergibt sich:

Teil a) Die Höhe auf die Seite \overline{AB} der Länge $\sqrt{20}$ beträgt nach Flächeninhaltsformel im Dreieck $2 \frac{7}{\sqrt{20}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$.

Teil b) Weiter erkennt man, dass die Höhe \overline{AF} des Dreiecks ABC durch den Gitterpunkt G gehen muss, mit ihm also im Inneren des Dreiecks liegt und länger als die zugehörige Grundseite \overline{BC} ist, weil \overline{AG} durch geeignete Drehung um 90° aus \overline{BC} hervorgeht. Daraus ergibt sich, dass es ein Quadrat mit Seitenlänge $|\overline{AF}|$ gibt, bei dem \overline{BC} auf einer und A auf der gegenüberliegenden Seite liegt. Analog zu *Teil a)* ergibt sich seine Seitenlänge zu $|\overline{AF}| = 2 \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{14}{\sqrt{13}}$.

Das Quadrat mit der Seitenlänge $|\overline{AF}|$ in Abbildung L 621043 a Mitte ist wegen $|\overline{AF}| > |\overline{BC}|$ also ein Quadrat, welches das gegebene Dreieck vollständig enthält.

Nun wird gezeigt, dass jedes Quadrat Q , welches das gegebene Dreieck vollständig enthält, mindestens Seitenlänge $|\overline{AF}|$ hat.

Dazu bemerkt man zunächst, dass $|\overline{CF}| > 1 = |\overline{C'C}|$ gilt. Mit dem Satz des Pythagoras in den Dreiecken ACC' und AFC folgt $|\overline{AF}| < |\overline{AC'}|$. Daraus ergibt sich, dass der Bogen des Kreises k um A durch F , welcher innerhalb des Winkels $\sphericalangle B'AC'$ liegt, vollständig in dem Fünfeck $AB'BCC'$ liegt, siehe Abbildung L 621043 a rechts.

Zu Q gibt es stets zwei Geraden durch A , die parallel zu zwei seiner Seiten sind. Da diese senkrecht aufeinander stehen, liegt wenigstens eine der beiden, die wir g nennen, so, dass sie keinen inneren Punkt des Fünfecks $AB'BCC'$ enthält. Die zu g parallele Gerade g' durch eine Ecke des Fünfecks, welche größten Abstand zu g hat, geht durch B oder C , da die Parallele zu g durch C' auch \overline{AC} und die Parallele zu g durch B' auch \overline{AB} trifft. Damit liegt aber auch k vollständig auf der Seite von g' , die g enthält.

Folglich ist g' Passante oder Tangente von k und hat zu dem Punkt A und somit auch zu g mindestens den Abstand $|\overline{AF}|$, weil \overline{AF} ein Radius von k ist.

Da A , B und C in Q enthalten sein müssen, treffen g und g' die zu g senkrechten Seiten von Q , weswegen Q mindestens die Seitenlänge $|\overline{AF}|$ hat.

Damit ist die gesuchte Seitenlänge gleich $\frac{14}{\sqrt{13}}$.

Anmerkung: Durch Auszählen von Anstiegsdreiecken beim Zeichnen kann man absichern, dass Abbildung L 621043 a selbst als handgemalte Skizze die Lagebeziehungen der Gitterlinien zu den eingezeichneten Linien korrekt darstellt.

Auszählen im endlichen Gitter hat im Gegensatz zum Ausmessen in der Tat Beweiskraft, da die so ermittelten Anzahlen exakt sind, selbst wenn die Skizze überhaupt nicht maßstäblich und nur qualitativ korrekt ist.

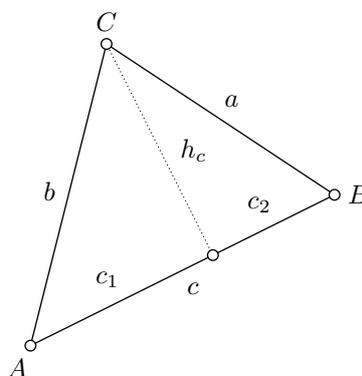
Ausmessen der Längen hingegen ist wegen der damit verbundenen Ungenauigkeit prinzipiell ungeeignet, um in mathematischen Beweisen verwendet zu werden.

Die Idee zu Abbildung L 621043 a links ergibt sich schnell, wenn man versucht, die Radikanden der gegebenen Wurzelausdrücke als Summe von zwei Quadraten darzustellen, um das Dreieck ABC durch Anstückelung von rechtwinkligen Dreiecken zu einem Quadrat zu ergänzen.

Eine Lösung ohne Erraten einer geschickten Lage des Dreiecks wird im folgenden dargestellt.

Zweite Lösung:

Teil a)



L 621043 b

Die Längen der Seiten des Dreiecks ABC seien wie üblich mit $a = \sqrt{13}$, $b = \sqrt{17}$ und $c = \sqrt{20}$ bezeichnet. Die Höhe auf die längste Dreiecksseite \overline{AB} habe die Länge h_c . Da c die längste Seite des Dreiecks ist, liegt der Höhenfußpunkt von h_c im Inneren der Dreiecksseite c und teilt diese in Abschnitte der Längen c_1 und c_2 (siehe Abbildung L 621043 b). Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich daraus

$$c_1^2 + h_c^2 = 17, \quad c_2^2 + h_c^2 = 13, \quad c_1 + c_2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen ergibt sich

$$4 = c_1^2 - c_2^2 = (c_1 - c_2)(c_1 + c_2) = 2\sqrt{5}(c_1 - c_2),$$

also

$$c_1 + c_2 = 2\sqrt{5}, \quad c_1 - c_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

und weiter

$$c_1 = \frac{6}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{4}{\sqrt{5}}, \quad h_c = \sqrt{17 - c_1^2} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

Die gesuchte Höhenlänge ist also $h_c = \frac{7}{\sqrt{5}}$.

Teil b) Nach Teil a) hat das Dreieck den Flächeninhalt

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c = \frac{1}{2}\sqrt{20} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} = 7.$$

Daraus ergibt sich

$$h_a = \frac{14}{\sqrt{13}} \quad \text{und} \quad h_b = \frac{14}{\sqrt{17}}.$$

Weiterhin ist das Dreieck ABC nach dem erweiterten Satz des Pythagoras spitzwinklig, denn es gilt $a^2 + b^2 > c^2$ und analog für die anderen beiden Seiten.

Statt Quadraten betrachten wir zunächst Rechtecke, die das Dreieck ABC komplett enthalten. Zu jedem solchen Rechteck kann man durch Parallelverschiebung der Trägergeraden der Seiten ein *minimales* Rechteck finden, das ABC enthält, sich aber auf diese Weise nicht weiter verkleinern lässt. In einem solchen minimalen Rechteck liegen also alle drei Eckpunkte A , B , C des Dreiecks auf Rechteckseiten.

Die Länge der kürzesten längeren Seite eines solchen Rechtecks ist dann die gesuchte Quadratseitenlänge, denn aus jedem solchen Rechteck kann man durch Vergrößern der kleineren Seite ein Quadrat erzeugen, das ABC enthält, und umgekehrt.

Wir bestimmen nun unter allen solchen minimalen Rechtecken dasjenige, dessen längere Seite am kürzesten ist.

Fall 1: In dem minimalen Rechteck liegen zwei der Eckpunkte des Dreiecks ABC auf einer Rechteckseite.

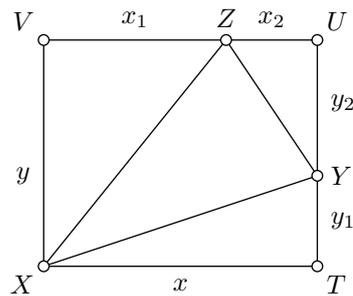
Diese beiden Eckpunkte des Dreiecks fallen wegen der Minimalität des Rechtecks und der Spitzwinkligkeit des Dreiecks mit den Endpunkten der Rechteckseite zusammen. Der dritte Eckpunkt liegt auf der gegenüberliegenden Rechteckseite.

Es gibt also genau drei solche minimalen Rechtecke mit den Seitenlängen a und h_a , b und h_b sowie c und h_c . Die längeren Seiten dieser Rechtecke haben der Größe nach geordnet die Längen $c > b > h_a$, letzteres wegen $h_a = \frac{14}{\sqrt{13}} > \sqrt{13} = a$, denn es ist $14 > \sqrt{13}^2 = 13$.

Unter den in diesem Fall untersuchten minimalen Rechtecken ist also das Rechteck mit Seite \overline{BC} und A auf der gegenüberliegenden Seite dasjenige, dessen längere Seite am kürzesten ist. Seine längere Seite hat die Länge h_a , und es gilt $h_a = \frac{14}{\sqrt{13}} < 4$, denn es ist $14 = 2\sqrt{49} < 2\sqrt{52} = 4\sqrt{13}$.

Fall 2: In dem minimalen Rechteck liegen keine zwei der Eckpunkte des Dreiecks ABC auf ein und derselben Rechteckseite.

Da auf jeder der vier Seiten des minimalen Rechtecks einer der drei Eckpunkte des Dreiecks ABC liegt, muss ein Eckpunkt X des Dreiecks auf zwei adjazenten Seiten liegen und folglich mit einem Eckpunkt des Rechtecks zusammenfallen. Die beiden anderen Eckpunkte Y und Z des Dreiecks liegen dann auf den dazu nicht inzidenten Seiten des Rechtecks $XTUV$ (siehe Abbildung L 621043 c).



L 621043 c

Wir zeigen, dass in diesem Fall die längere der Rechteckseiten stets länger als h_a ist, wir also zu keiner besseren Lösung als im ersten Fall kommen.

Die Längen der Rechteckseiten seien $x = |\overline{XT}|$ und $y = |\overline{XV}|$, Y teilt \overline{TU} in Abschnitte mit den Längen y_1 und y_2 , wobei $y = y_1 + y_2$ gilt, Z teilt \overline{UV} in Abschnitte mit den Längen x_1 und x_2 , wobei $x = x_1 + x_2$ gilt, siehe Abbildung L 621043 c.

Es sind folgende Fälle möglich:

Fall 2.1: $X = A$, $|\overline{YZ}| = \sqrt{13}$. Ohne Einschränkung können wir $Y = B$ und $Z = C$ annehmen.

Angenommen, beide Rechteckseiten hätten Längen kleiner als 4. Mehrfache Anwendung des Satzes des Pythagoras führt zu folgenden Erkenntnissen:

- Aus $c^2 = 20 = x^2 + y_1^2$ und $x < 4$ folgt $y_1 > 2$ und damit $y_2 = y - y_1 < 2$.
- Aus $b^2 = 17 = y^2 + x_1^2$ und $y < 4$ folgt $x_1 > 1$.
- Aus $a^2 = 13 = y_2^2 + x_2^2$ und $y_2 < 2$ folgt $x_2 > 3$.

Insgesamt ergibt sich $x = x_1 + x_2 > 4$ im Widerspruch zur Annahme. Die längere Rechteckseite hat in diesem Fall also eine Länge von mindestens 4.

Fall 2.2: $X = B$ oder $X = C$. In diesen Fällen gilt $A = Y$ oder $A = Z$. Es sei o.B.d.A. $A = Y$. Das Lot aus A auf die gegenüberliegende Rechteckseite (mit der Länge y) wird von \overline{BC} im Inneren geschnitten und ist daher länger als das Lot von A auf die gegenüberliegende Dreieckseite \overline{BC} (mit der Länge h_a). Auch in diesem Fall ist also eine der Rechteckseiten länger als h_a .

Damit ist gezeigt, dass $h_a = \frac{14}{\sqrt{13}}$ die Seitenlänge des kleinsten Quadrats ist, in welches das Dreieck ABC komplett hineinpasst.



621141 Lösung

6 Punkte

Der Term auf der linken Seite von (1) lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$\begin{aligned} n^3 + m^3 - nm(n + m) &= n^3 - n^2m - nm^2 + m^3 \\ &= n^2(n - m) - (n - m)m^2 \\ &= (n^2 - m^2)(n - m) \\ &= (n + m)(n - m)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Gleichung der Aufgabe ist somit äquivalent zu

$$(n + m)(n - m)^2 = 2023. \tag{2}$$

Wenn das Paar aus den Zahlen m und n also die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann muss die Quadratzahl $(n - m)^2$ ein Teiler von 2023 sein. Außerdem muss dabei wegen $n \geq m$ die Ungleichung $n - m \geq 0$ gelten.

Die Zahl 2023 hat nun die Primfaktorzerlegung

$$2023 = 7 \cdot 17^2.$$

Die einzigen Quadratzahlen, die Teiler von 2023 sind, sind also $1 = 1^2$ und $289 = 17^2$. Es wird zwischen diesen beiden Fällen unterschieden.

Fall 1: $n - m = 1$.

Dann ist (2) äquivalent zu $n + m = 2023$. Zusammen mit $n - m = 1$ ergeben sich $m = 1011$ und $n = 1012$.

Fall 2: $n - m = 17$.

Dann bleibt von (2) die Gleichung $n + m = 7$. Zusammen mit $n - m = 17$ erhält man $m = -5$ und $n = 12$.

Die Fallunterscheidung ist vollständig. In jedem Fall ist die Umformung äquivalent. Anstelle dieses Hinweises auf Äquivalenz kann auch eine Probe durchgeführt werden:

Probe: In beiden Fällen gilt $n \geq m$. Des Weiteren gilt im ersten Fall $(n + m)(n - m)^2 = 2023 \cdot 1^2 = 2023$ und im zweiten Fall $(n + m)(n - m)^2 = 7 \cdot 17^2 = 2023$.

Ergebnis: Es gibt genau zwei Lösungen, nämlich $(1011, 1012)$ und $(-5, 12)$.

Bemerkungen: 1. Das Polynom auf der linken Seite der Gleichung (1) wird zu null, wenn $n = m$ gesetzt wird. Aus diesem Grunde ist es möglich, den Faktor $(n - m)$ auszuklammern.

Alternativ kann die Faktorisierung (1) auch gefunden werden, indem die bekannte Formel $n^3 + m^3 = (n + m)(n^2 - nm + m^2)$ verwendet wird. Stattdessen kann auch $x = n/m$ gesetzt

werden. Dies führt dann auf die Frage, welche rationalen Zahlen Nullstellen des Polynoms $x^3 - x^2 - x + 1$ sind.

2. Die Teilbarkeit von 2023 durch 7 kann zum Beispiel anhand der Rechnung

$$2023 = 2 \cdot 1001 + 21 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 7 \cdot 3 = 7 \cdot (2 \cdot 11 \cdot 13 + 3)$$

erkannt werden.

Selbstverständlich kann die Primfaktorzerlegung von 2023 aber auch leicht dadurch bestimmt werden, dass die Primzahlen systematisch der Reihe nach als Teiler probiert werden. Es ist sofort zu sehen, dass 2023 weder durch 2 noch durch 3 oder 5 teilbar ist. Bei der Probedivision durch 7 hat man dann Erfolg.

Darüber hinaus ist der zweite Faktor die Quadratzahl $289 = 17^2$.

621142 Lösung

7 Punkte

Wie üblich bezeichnen wir die Seitenlängen und die Innenwinkelgrößen des Dreiecks ABC mit a, b, c beziehungsweise mit α, β, γ .

Wir benutzen die Zerlegung

$$A_{DEFGHI} = A_{ADEBFGCHI} + A_{AID} + A_{BEF} + A_{CGH},$$

wobei sich der Flächeninhalt des Neunecks durch eine geeignete Überdeckung mit den sich überlappenden Dreiecken AFG, BHI und CDE bestimmen lässt:

$$A_{ADEBFGCHI} = A_{AFG} + A_{BHI} + A_{CDE} - 2 \cdot A_{ABC}.$$

Bekanntlich gilt $A_{ABC} = bc \sin(\alpha)/2$, nach Konstruktion von F und G also analog $A_{AFG} = (b+c)^2 \sin(\alpha)/2$ und mithin

$$\frac{A_{AFG}}{A_{ABC}} = \frac{(b+c)^2}{bc} = 4 + \frac{(b-c)^2}{bc} \geq 4.$$

Ebenso zeigt man

$$\frac{A_{BHI}}{A_{BCA}} \geq 4 \quad \text{sowie} \quad \frac{A_{CDE}}{A_{CAB}} \geq 4,$$

und die Addition aller drei Abschätzungen führt auf

$$\begin{aligned} \frac{A_{ADEBFGCHI}}{A_{ABC}} &= \frac{A_{AFG} + A_{BHI} + A_{CDE} - 2A_{ABC}}{A_{ABC}} \\ &\geq 4 + 4 + 4 - 2 = 10. \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen $A_{AID} = a^2 \sin(\alpha)/2$ ergibt sich in ähnlicher Weise

$$\frac{A_{AID}}{A_{ABC}} = \frac{a^2}{bc},$$

und analoge Überlegungen führen auf

$$\frac{A_{BEF}}{A_{BCA}} = \frac{b^2}{ca} \quad \text{sowie} \quad \frac{A_{CGH}}{A_{CAB}} = \frac{c^2}{ab}.$$

Addition der letzten drei Gleichungen liefert zusammen mit der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel dreier positiver Zahlen

$$\frac{A_{AID} + A_{BEF} + A_{CGH}}{A_{ABC}} = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc} \cdot \frac{b^2}{ca} \cdot \frac{c^2}{ab}} = 3.$$

Indem wir dies zu (1) addieren, resultiert

$$\frac{A_{DEFGHI}}{A_{ABC}} \geq 10 + 3 = 13,$$

womit die zu zeigende Behauptung bewiesen ist.

621143 Lösung

7 Punkte

Wir bezeichnen die Disziplinen mit D_1, D_2, D_3 , die im schulinternen Wettkampf entstandenen Rangfolgen seien R_1, R_2 und R_3 . Für zwei Teilnehmende A, B und für $i \in \{1, 2, 3\}$ schreiben wir $A >_i B$, falls A gegen B in der Disziplin D_i gewinnt (also in R_i eine kleinere Platznummer hat). Falls $A >_i B$ für mindestens zwei verschiedene Indizes i gilt, sagen wir „ A dominiert B “ und notieren dies in der Form $A \rightarrow B$. Da je zwei Teilnehmende A und B auf drei Rangfolgen verglichen werden, gilt immer entweder $A \rightarrow B$ oder $B \rightarrow A$.

Wir beweisen nun die folgende Aussage:

(A) *Gibt es eine zulässige Auswahl eines Zweierteams, wenn an den Qualifikationswettkämpfen der Schule $n \geq 3$ Personen teilnehmen, so gibt es auch eine solche Auswahl für $n - 1$ Teilnehmende.*

Zur Begründung ergänzen wir die $n - 1$ Teilnehmenden gedanklich um eine weitere Person S , die in allen Rangfolgen am schlechtesten ist, und bilden dann das Auswahlteam. Gehört S nicht zu diesem Team, erfüllt dieses Team auch die Bedingung **(B)** für die ursprünglichen $n - 1$ Teilnehmenden. Anderenfalls ist sicher, dass keine nicht qualifizierte Person durch S dominiert wird; daher kann man S aus dem Team weglassen und ein (beliebiges) weiteres Mitglied aus den bislang nicht qualifizierten Teilnehmenden ins Team aufnehmen.

Wir untersuchen jetzt, für welche n es immer möglich ist, ein Team mit zwei Mitgliedern zusammenzustellen.

Im Fall $n = 6$ können aus den sechs Teilnehmenden genau $\binom{6}{2} = 15 > 6 \cdot 2$ Paare gebildet werden. Infolge des Schubfachprinzips existiert also eine Schülerin oder ein Schüler A , die oder der mindestens drei andere dominiert. Wir nehmen A in das Team der Schule auf. Es verbleiben dann $j \leq 2$ (nicht nominierte) Teilnehmende, die von A nicht dominiert werden. Ist $j = 0$, bilden wir ein Team aus A und einer beliebigen weiteren Person. Für $j = 1$ nehmen wir A und die betreffende Person in das Team auf. Für $j = 2$ dominiert eine der verbleibenden Personen die andere, und das Team kann durch Aufnahme dieser dominanten Person ergänzt werden, sodass die Bedingung **(B)** erfüllt ist.

Damit ist für $n = 6$ die Teambildung stets möglich, und aufgrund der Aussage **(A)** gilt dies auch für alle n mit $2 \leq n \leq 6$.

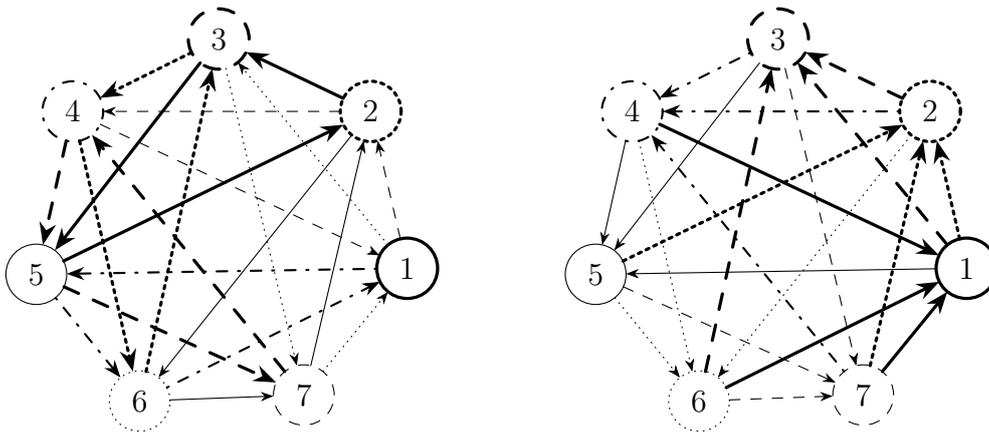
Wir zeigen nun durch Angabe von Rangfolgen R_1, R_2 und R_3 , dass es für $n = 7$ nicht immer möglich ist, ein zulässiges Team mit zwei Mitgliedern zusammenzustellen. So erhalten wir für die Rangfolgen (in denen nur die Nummern k der Teilnehmenden S_k aufgeführt sind)

$$R_1 = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),$$

$$R_2 = (6, 3, 7, 4, 1, 5, 2),$$

$$R_3 = (5, 7, 2, 4, 6, 1, 3)$$

den in Abbildung L 621143 gezeigten „Dominanzgraphen“.



L 621143

Jede teilnehmende Person A dominiert dabei genau drei andere, B , C und D , die sich gegenseitig zyklisch dominieren, $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$, (im linken Graphen in der gleichen Darstellung der Linien angedeutet). Genauer gilt

- | | | |
|---|-----------|---|
| 1 | dominiert | $2 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, |
| 2 | dominiert | $3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 3$, |
| 3 | dominiert | $4 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 4$, |
| 4 | dominiert | $5 \rightarrow 6 \rightarrow 1 \rightarrow 5$, |
| 5 | dominiert | $6 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 6$, |
| 6 | dominiert | $7 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7$, |
| 7 | dominiert | $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. |

Die rechte Abbildung desselben Graphen illustriert, dass für jede teilnehmende Person A sich auch die drei anderen Teilnehmenden E , F und G , die von A *nicht* dominiert werden (rechts haben diese Dominanzen den gleichen Linienstil wie A), gegenseitig zyklisch dominieren, also $E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow E$.

Ist nun A ein Mitglied des Teams, so kann höchstens noch eine weitere Person des Tripels $\{E, F, G\}$ ausgewählt werden, beispielsweise E . Dann wird aber eine der beiden verbleibenden Personen (in diesem Fall G) weder von A noch von E dominiert, die Bedingung **(B)** ist also nicht erfüllt. Wird dagegen gar keine Person aus $\{E, F, G\}$ für das Team ausgewählt, dann sei das zweite Teammitglied ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit B . Da B aber nun die Person C dominiert, kann es nicht außerdem jede der Personen E , F und G dominieren, so dass Bedingung **(B)** ebenfalls verletzt ist.

Die Möglichkeit der Auswahl eines Teams mit zwei Mitgliedern unter Beachtung der Bedingung **(B)** ist also genau für $2 \leq n \leq 6$ gegeben.



621241 Lösung

6 Punkte

Der Term auf der linken Seite von (1) lässt sich wie folgt faktorisieren:

$$\begin{aligned}
 n^3 + m^3 - nm(n + m) &= n^3 - n^2m - nm^2 + m^3 \\
 &= n^2(n - m) - (n - m)m^2 \\
 &= (n^2 - m^2)(n - m) \\
 &= (n + m)(n - m)^2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Die Gleichung der Aufgabe ist somit äquivalent zu

$$(n + m)(n - m)^2 = 2023. \tag{2}$$

Wenn das Paar aus den Zahlen m und n also die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, dann muss die Quadratzahl $(n - m)^2$ ein Teiler von 2023 sein. Außerdem muss dabei wegen $n \geq m$ die Ungleichung $n - m \geq 0$ gelten.

Die Zahl 2023 hat nun die Primfaktorzerlegung

$$2023 = 7 \cdot 17^2.$$

Die einzigen Quadratzahlen, die Teiler von 2023 sind, sind also $1 = 1^2$ und $289 = 17^2$. Es wird zwischen diesen beiden Fällen unterschieden.

Fall 1: $n - m = 1$.

Dann ist (2) äquivalent zu $n + m = 2023$. Zusammen mit $n - m = 1$ ergeben sich $m = 1011$ und $n = 1012$.

Fall 2: $n - m = 17$.

Dann bleibt von (2) die Gleichung $n + m = 7$. Zusammen mit $n - m = 17$ erhält man $m = -5$ und $n = 12$.

Die Fallunterscheidung ist vollständig. In jedem Fall ist die Umformung äquivalent. Anstelle dieses Hinweises auf Äquivalenz kann auch eine Probe durchgeführt werden:

Probe: In beiden Fällen gilt $n \geq m$. Des Weiteren gilt im ersten Fall $(n + m)(n - m)^2 = 2023 \cdot 1^2 = 2023$ und im zweiten Fall $(n + m)(n - m)^2 = 7 \cdot 17^2 = 2023$.

Ergebnis: Es gibt genau zwei Lösungen, nämlich $(1011, 1012)$ und $(-5, 12)$.

Bemerkungen: 1. Das Polynom auf der linken Seite der Gleichung (1) wird zu null, wenn $n = m$ gesetzt wird. Aus diesem Grunde ist es möglich, den Faktor $(n - m)$ auszuklammern.

Alternativ kann die Faktorisierung (1) auch gefunden werden, indem die bekannte Formel $n^3 + m^3 = (n + m)(n^2 - nm + m^2)$ verwendet wird. Stattdessen kann auch $x = n/m$ gesetzt

werden. Dies führt dann auf die Frage, welche rationalen Zahlen Nullstellen des Polynoms $x^3 - x^2 - x + 1$ sind.

2. Die Teilbarkeit von 2023 durch 7 kann zum Beispiel anhand der Rechnung

$$2023 = 2 \cdot 1001 + 21 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 7 \cdot 3 = 7 \cdot (2 \cdot 11 \cdot 13 + 3)$$

erkannt werden.

Selbstverständlich kann die Primfaktorzerlegung von 2023 aber auch leicht dadurch bestimmt werden, dass die Primzahlen systematisch der Reihe nach als Teiler probiert werden. Es ist sofort zu sehen, dass 2023 weder durch 2 noch durch 3 oder 5 teilbar ist. Bei der Probedivision durch 7 hat man dann Erfolg.

Darüber hinaus ist der zweite Faktor die Quadratzahl $289 = 17^2$.

621242 Lösung

7 Punkte

Wie üblich bezeichnen wir die Seitenlängen und die Innenwinkelgrößen des Dreiecks ABC mit a, b, c beziehungsweise mit α, β, γ .

Wir benutzen die Zerlegung

$$A_{DEFGHI} = A_{ADEBFGCHI} + A_{AID} + A_{BEF} + A_{CGH},$$

wobei sich der Flächeninhalt des Neunecks durch eine geeignete Überdeckung mit den sich überlappenden Dreiecken AFG, BHI und CDE bestimmen lässt:

$$A_{ADEBFGCHI} = A_{AFG} + A_{BHI} + A_{CDE} - 2 \cdot A_{ABC}.$$

Bekanntlich gilt $A_{ABC} = bc \sin(\alpha)/2$, nach Konstruktion von F und G also analog $A_{AFG} = (b+c)^2 \sin(\alpha)/2$ und mithin

$$\frac{A_{AFG}}{A_{ABC}} = \frac{(b+c)^2}{bc} = 4 + \frac{(b-c)^2}{bc} \geq 4.$$

Ebenso zeigt man

$$\frac{A_{BHI}}{A_{BCA}} \geq 4 \quad \text{sowie} \quad \frac{A_{CDE}}{A_{CAB}} \geq 4,$$

und die Addition aller drei Abschätzungen führt auf

$$\begin{aligned} \frac{A_{ADEBFGCHI}}{A_{ABC}} &= \frac{A_{AFG} + A_{BHI} + A_{CDE} - 2A_{ABC}}{A_{ABC}} \\ &\geq 4 + 4 + 4 - 2 = 10. \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen $A_{AID} = a^2 \sin(\alpha)/2$ ergibt sich in ähnlicher Weise

$$\frac{A_{AID}}{A_{ABC}} = \frac{a^2}{bc},$$

und analoge Überlegungen führen auf

$$\frac{A_{BEF}}{A_{BCA}} = \frac{b^2}{ca} \quad \text{sowie} \quad \frac{A_{CGH}}{A_{CAB}} = \frac{c^2}{ab}.$$

Addition der letzten drei Gleichungen liefert zusammen mit der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel dreier positiver Zahlen

$$\frac{A_{AID} + A_{BEF} + A_{CGH}}{A_{ABC}} = \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{a^2}{bc} \cdot \frac{b^2}{ca} \cdot \frac{c^2}{ab}} = 3.$$

Indem wir dies zu (1) addieren, resultiert

$$\frac{A_{DEFGHI}}{A_{ABC}} \geq 10 + 3 = 13,$$

womit die zu zeigende Behauptung bewiesen ist.

621243 Lösung

7 Punkte

Wir bezeichnen die Disziplinen mit D_1, D_2, D_3 . Für zwei Teilnehmende A, B und für $i \in \{1, 2, 3\}$ schreiben wir $A >_i B$, falls A gegen B in der Disziplin D_i gewinnt. Falls $A >_i B$ für mindestens zwei verschiedene Indizes i gilt, sagen wir „ A dominiert B “ und notieren dies in der Form $A \rightarrow B$. Da je zwei Teilnehmende A und B auf drei Rangfolgen verglichen werden, gilt immer entweder $A \rightarrow B$ oder $B \rightarrow A$.

Gemäß Bedingung **(B)** suchen wir ein Dreier-team T mit der Eigenschaft, dass alle $n - 3$ nicht in T aufgenommenen Teilnehmenden von mindestens einem Mitglied von T dominiert werden.

Es seien $A_1 >_1 A_2 >_1 \cdots >_1 A_n$ die gemäß ihrer Stärke in der ersten Disziplin aufgezählten Teilnehmenden, wobei A_1 am besten und A_n am schlechtesten sei. Wenn A_1 alle anderen Teilnehmenden dominiert, können wir A_1 und zwei beliebige weitere Personen in das Team T nominieren und sind fertig.

Andernfalls wird A_1 mindestens einmal dominiert. Dann gibt es ein größtes $m \in \{1, \dots, n\}$ mit der Eigenschaft, dass es eine Schülerin oder einen Schüler B gibt, die oder der A_1, \dots, A_m allesamt dominiert.

Wegen $B \in \{A_{m+1}, \dots, A_n\}$ wissen wir, dass $m < n$ ist. Aus der Maximalität von m folgt, dass B nicht alle Personen in $\{A_1, \dots, A_{m+1}\}$ dominieren kann, und somit ist $B \rightarrow A_{m+1}$ falsch. Also ist auch mindestens eine der beiden Aussagen $B >_2 A_{m+1}$ und $B >_3 A_{m+1}$ falsch. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit dürfen wir daher annehmen, dass $A_{m+1} >_3 B$ gilt oder $A_{m+1} = B$ ist.

Unter allen Angehörigen der Menge $\{A_1, \dots, A_m\}$ sei C in der zweiten Disziplin am stärksten. Wir werden zeigen, dass alle anderen Teilnehmenden von mindestens einem Element der Menge $T' = \{A_{m+1}, B, C\}$ dominiert werden.

Wir betrachten dazu eine beliebige Schülerin oder einen beliebigen Schüler $X \notin T'$ mit $X \rightarrow A_{m+1}$ und $X \rightarrow B$ und wollen $C \rightarrow X$ beweisen. Da weder $B \rightarrow X$ noch $X = A_{m+1}$ gilt, muss $X \in \{A_{m+2}, \dots, A_n\}$ sein. Infolge der Maximalität von m kann X nicht die gesamte Menge $\{A_1, \dots, A_{m+1}\}$ dominieren. Zusammen mit $X \rightarrow A_{m+1}$ zeigt dies die Existenz einer Person $Z \in \{A_1, \dots, A_m\}$ mit $Z \rightarrow X$.

Wegen $B \rightarrow Z$ und $Z >_1 B$ ist $B >_3 Z$, was zusammen mit $A_{m+1} >_3 B$ oder $A_{m+1} = B$ auf $A_{m+1} >_3 Z$ führt. Analog implizieren $X \rightarrow A_{m+1}$ und $A_{m+1} >_1 X$ die Aussage $X >_3 A_{m+1}$, womit wir insgesamt $X >_3 Z$ erhalten.

Da jedoch $Z \rightarrow X$ gilt, können wir hieraus $Z >_2 X$ ableiten. In Verbindung mit der bezüglich der Disziplin D_2 minimalen Wahl von C folgt $C >_2 X$.

Außerdem ist $C >_1 X$, denn $C \in \{A_1, \dots, A_m\}$ und $X \in \{A_{m+2}, \dots, A_n\}$. Zusammen mit dem Ergebnis des vorigen Absatzes zeigt dies in der Tat $C \rightarrow X$.

Die Menge $T' = \{A_{m+1}, B, C\}$ hat also tatsächlich die Eigenschaft, dass jede nicht in T' enthaltene Person von mindestens einer aus T' dominiert wird. Da $|T'| \leq 3$ gilt, kann man ein Team aus drei Personen bilden, indem man gegebenenfalls noch $3 - |T'|$ beliebige weitere Personen nachnominert.

Damit ist gezeigt, dass für alle $n \geq 3$ die Bildung eines solchen Teams immer möglich ist.

Ergebnis: Die Möglichkeit der Auswahl eines Teams mit drei Mitgliedern unter Beachtung der Bedingung **(B)** ist für alle $n \geq 3$ gegeben.