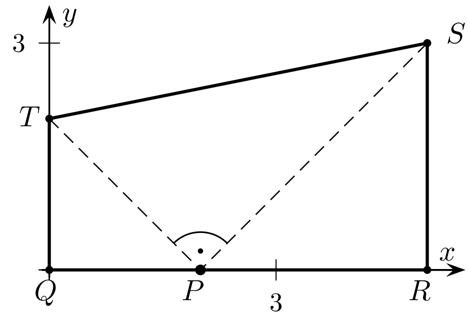
Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase am 15. Februar 2023

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb MW-E der Einführungsphase werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss dabei klar erkennbar sein.
Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab dem 01.Februar 2023 unter http:www.z-f-m.de im Bereich Projekte – MW-E.

1.) Die nebenstehende Abbildung zeigt das Viereck $QRST$ mit $Q(0|0)$, $R(5|0)$, $S(5|3)$ und $T(0|2)$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass der Winkel $\angle SPT = 90°$ groß ist.



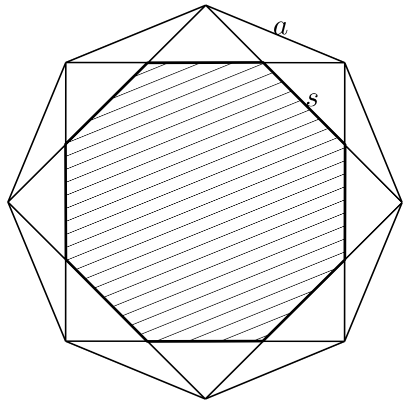
2.) Wählen Sie eine zweistellige Zahl.
Vertauschen Sie die Einer- und die Zehnerziffer und addieren Sie die beiden Zahlen.
Beispiel: $39 + 93 = 132$

a) Wiederholen Sie dies an drei weiteren Beispielen.
Alle diese Summen haben einen gemeinsamen größten Teiler.
Stellen Sie ein Vermutung auf, welches dieser größte gemeinsame Teiler ist.

b) Beweisen Sie Ihre Vermutung anhand einer beliebigen zweistelligen Zahl ab.

3.) a) Die nebenstehende Abbildung zeigt ein regelmäßiges Achteck mit Seitenlänge $a = 2$.
Verbindet man diejenigen Eckpunkte zwischen denen jeweils genau ein weiterer Eckpunkt liegt, so entsteht das kleinere (schraffiert gezeichnete) Achteck.

Berechnen Sie die Seitenlängen s dieses kleineren Achteckes.

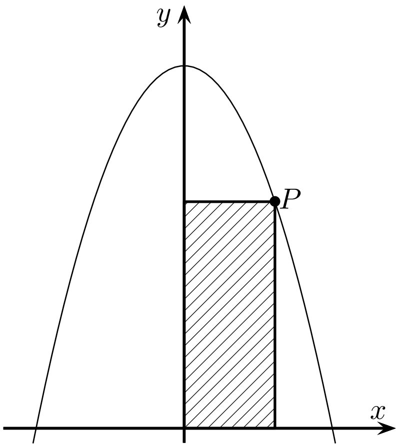


b) Die Seiten eines Dreiecks haben die Längen 6, 8 und n, wobei n natürliche Zahl ist.

Bestimmen Sie, wie viele solcher verschiedenen Dreiecke es gibt, d. h. für welche n die Dreiecksungleichungen erfüllt sind.

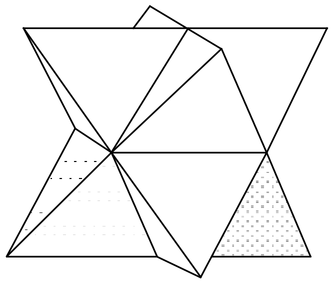
4.) Die nebenstehende Abbildung zeigt das Schaubild der Parabel $p(x) = 8 - x^2$.
Der Parabel ist im 1. Quadranten ein Rechteck einbeschrieben, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen und dessen Ecke P auf der Parabel p liegt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P so, dass das Rechteck eine möglichst große Fläche hat und berechnen Sie diese.



Bemerkung: Zur Berechnung des Maximums ohne Differenzialrechnung kann die Umformung $3b^2x - x^3 = 2b^3 - (x - b)^2 \cdot (x + 2b)$ hilfreich sein.

5.) Zwei reguläre Tetraeder mit Kantenlänge a durchdringen einander so, dass jede Fläche durch die Mittelpunkte von drei Kanten geht, die von einer Ecke ausgehen.
Die Vereinigung V der beiden Tetraeder ist somit ein dreidimensionaler “Stern”.



a) Sei D der *Durchdringungskörper* der beiden Tetraeder, der aus allen Punkten besteht, die zu beiden Tetraedern gehören.
Beschreiben Sie diesen *Durchdringungskörper.*

b) In welchem Verhältnis stehen die Volumina von V und D?

6.) a) Bestimmen Sie die Anzahl aller 4−stelligen Zahlen, die die Ziffern 1; 2; 7; 5 genau 1−mal enthalten.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Zahlen aus a), die durch 6 teilbar sind.

c) Bestimmen Sie die Anzahl aller 4−stelligen Zahlen, die die Ziffer 4 mindestens 1−mal enthalten.

7.) Die Parabel $p(x) = 2x^2 - bx + 8$ habe die Nullstellen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$.

a) Bestimmen den Wert von b so, dass $x_1 = 1$ gilt und geben Sie x_2 an.

b) Für die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + x + 5$ gilt: $f(-3) = 5$.
Bestimmen Sie den Wert von $f(3)$.

c) Die Funktion f ist für alle natürlichen Zahlen definiert durch:

$$f(n) = \begin{cases} n+3 & \text{für ungerade } n \\ \frac{1}{2} \cdot n & \text{für gerade } n \end{cases}$$

Bestimmen Sie, für welche n gilt: $f(f(f(n))) = 27$

8.) a) Berechnen Sie, für welches n

$$log_{10}(200!) - log_{10}(198!) = log_{10}(398) + n$$

gilt.

Hinweis:
Für jede natürliche Zahl n ist die Fakultät von n definiert als: $n\,! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \; \cdots \; \cdot n$

b) Ein Hase und ein Igel vereinbaren ein Wettrennen.
Da der Hase $k-$mal ($k > 1$) schneller als der Igel ist, startet der Igel mit einem Vorsprung von m Metern.

Ermitteln Sie die Strecke s, die der Hase laufen muss, bis er den Igel eingeholt hat, in Abhängigkeit von k und m.

Gehen Sie dabei davon aus, dass sich sowohl der Hase als auch der Igel während des gesamten Rennens mit konstanter Geschwindigkeit laufen.