Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase am 15. Februar 2023

1. Sei x_p die $x-$Koordinate des Punktes P.

<u>1. Lösung:</u>

Es gilt: $\overline{TS}^2 = 5^2 + (3-2)^2 = 26$

und $\quad \overline{TS}^2 = \overline{PT}^2 + \overline{PS}^2 = 2^2 + x_p^2 + 3^2 + (5-x_p)^2 = 2x_p^2 - 10x_p + 38$

$\Rightarrow \quad 26 = 2x_p^2 - 10x_p + 38 \quad \Rightarrow \quad x_p^2 - 5x_p + 6 = 0$

$\Rightarrow \quad x_p = 2 \lor x_p = 3 \quad \Rightarrow \quad P_1(2|0)$ und $P_2(3|0)$

<u>2. Lösung</u>

Für die Steigung m_1 der Geraden g_1 durch P und S gilt: $m_1 = \dfrac{3}{5-x_p}$

Für die Steigung m_2 der Geraden g_2 durch P und T gilt: $m_2 = -\dfrac{2}{x_p}$

Da $g_1 \perp g_2$ folgt $\dfrac{3}{5-x_p} \cdot \left(-\dfrac{2}{x_p}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad x_p = 2 \lor x_p = 3$

---

2. a) $21 + 12 = 33 = 3 \cdot 11$
$55 + 55 = 110 = 10 \cdot 11$
$38 + 83 = 121 = 11 \cdot 11$
$\Rightarrow$ Vermutung: Alle Summen haben 11 als ggT.

b) Beweis: $10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11 \cdot (a+b)$

---

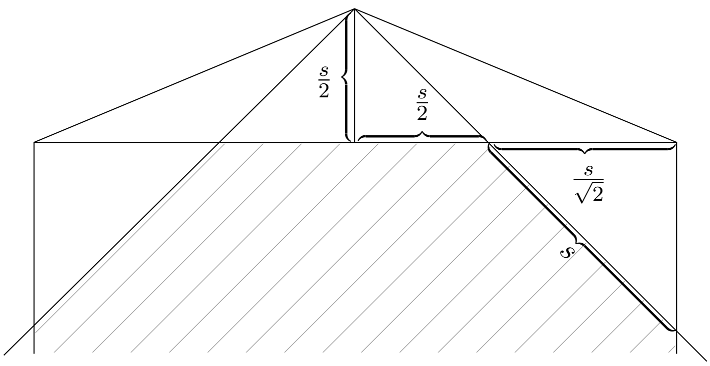
3. a) Für die Seiten des kleinen Achteckes gilt:

$\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2} + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$

Also ist $\frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{\sqrt{2}} + \frac{s^2}{2} = 4$

$\Rightarrow \quad s^2 \cdot \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} = 4$

$\Rightarrow \quad s = \sqrt{8 - 4\cdot\sqrt{2}} = 2\sqrt{2-\sqrt{2}}$



b) Aus den Dreiecksungleichungen folgt:
$8 < 6 + n$ und $n < 8 + 6$
$\Rightarrow 2 < n < 14$
Somit gibt es 11 solcher Dreiecke.

4. Lösung mit Differenzialrechnung:

Aus $A(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (8 - x^2) = 8x - x^3$ folgt: $A'(x) = 8 - 3x^2$ und $A''(x) = -6x$

$\Rightarrow \quad A'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow x = \sqrt{\frac{8}{3}}$, da $x > 0$ Mit $f''(\sqrt{\frac{8}{3}}) < 0 \Rightarrow$ Maximum

$\Rightarrow \quad A(\sqrt{\frac{8}{3}}) = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot (8 - \frac{8}{3}) = \frac{16}{3} \cdot \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{32}{9} \cdot \sqrt{6}$

Lösung ohne Differenzialrechnung:

Ein Koeffizientenvergleich bei $8x - x^3$ und $3b^2x - x^3$ liefert $b = \sqrt{\frac{8}{3}}$

$$\Rightarrow \quad A(x) = 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^3 - \underbrace{\left(x - \sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(x + 2\sqrt{\frac{8}{3}}\right)}_{>0}$$

Da $x > 0$ wird $A(x)$ maximal für $x = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

---

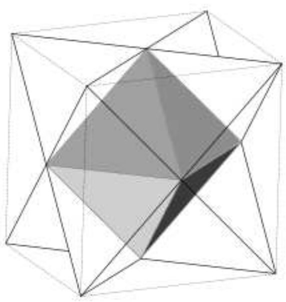
5. a) Der Durchdringungskörper hat 12 Kanten und wird von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt.
Er ist somit ein Oktaeder.

b) Der Oktaeder D entsteht dadurch, dass von einem Tetraeder (Volumen T) 4 kleine Tetraeder mit halber Kantenlänge abgeschnitten werden.

Daher ist das Volumen jedes dieser kleinen Tetraeder $\frac{1}{8}T$.

Somit beträgt das Volumen des Oktaeders
$D = T - 4 \cdot \frac{1}{8}T = \frac{1}{2}T$ und $V = T + 4 \cdot \frac{1}{8}T = \frac{3}{2}T$.

Folglich ist $\frac{V}{C} = 3$.



---

6. a) Für die Einerziffer gibt es 4 mögliche Ziffern zur Auswahl, für die Zehnerziffer 3, für die Hunderterziffer 2 und für die Tausenderziffer noch 1.

Somit ergeben sich insgesamt: $N_1 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ verschiedene 4−stellige Zahlen.

b) Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie gerade ist und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
Da alle Zahlen aus a) die Quersumme 15 haben, sind diejenigen von ihnen durch 6 teilbar, die die 2 als Einerziffer haben.

Somit ergeben sich $N_2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ Zahlen, die durch 6 teilbar sind.

c) Es gibt insgesamt $N_3 = 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ vierstellige Zahlen.
Von diesen enthalten alle mindestens 1−mal die Ziffer 4, außer diejenigen, die die Ziffer nicht enthalten.
Dies sind insgesamt $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ Zahlen.

Somit enthalten $N_3 = 9000 - 5832 = 3168$ vierstellige Zahlen mindestens 1−mal die Ziffer 4.

7. a) $p(x) = 2x^2 - bx + 8 = 2 \cdot (x^2 - \frac{b}{2} \cdot x + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{b}{2} \cdot x + 4 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{b}{4} \pm \sqrt{\frac{b^2}{16} - 4} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{b^2}{16} - 4} = 1 = x_1$

$\Rightarrow \frac{b}{4} - 1 = \sqrt{\frac{b^2}{16} - 4} \quad \Rightarrow \quad \frac{b^2}{16} - \frac{b}{2} + 1 = \frac{b^2}{16} - 4 \quad \Rightarrow \quad b = 10$

$\Rightarrow x_2 = \frac{10}{4} + \sqrt{\frac{10^2}{16} - 4} = 4$

b) $f(-3) = 81a + 9b - 3 + 5 = 5 \quad \Rightarrow \quad 81a + 9b = 3$

$f(3) = \underbrace{81a + 9b}_{=3} = 3 + 3 + 5 = 11$

c) Ist n ungerade, so ist $n + 3$ gerade.

Für ungerades n: $n = 27 \cdot 2 \cdot 2 - 3 = 105$

Für gerades n: $n = 27 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 216$ oder $n = (27 \cdot 2 - 3) \cdot 2 = 102$

---

8. a) $log_{10}(200!) - log_{10}(198!) = log_{10}\left(\frac{200!}{198!}\right) =$

$log_{10}(200 \cdot 199) = log_{10}(39800) = log_{10}(398) + log_{10}(10^2)$

$\Rightarrow \quad n = 2$

b) Hase: $s = v_H \cdot t = v_I \cdot k \cdot t$ Igel: $s = v_I \cdot t - m$

$\Rightarrow \frac{s}{k \cdot v_I} = t = \frac{s - m}{v_I} \quad \Rightarrow \quad \frac{s}{k} = s - m$

$\Rightarrow s = \frac{m \cdot k}{k - 1}$