Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase am 16. Februar 2022

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb MW-E der Einführungsphase werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss dabei klar erkennbar sein.
Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 01.Februar 2022 unter http:www.z-f-m.de im Bereich Projekte – MW-E.

1.) Das Dreieck ΔABC ist gegeben durch: $A(0,6 \mid 2)$, $B(5,4 \mid 0,6)$ und $C(3 \mid 3,8)$.

a) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig ist.

b) Geben Sie die Koordinaten des Höhenschnittpunktes H und des Umkreismittelpunktes M an.

c) Der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden teilt die Strecke $\overline{MC}$ im Verhältnis $\overline{MS} : \overline{SC} = 1 : 2$.
Bestimmen Sie anhand dieses Verhältnisses die Koordinaten des Punktes S.

2.) Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen im jeweils angegebenen Intervall.

a) $f(x) = \dfrac{2 \cdot x + |x|}{3}$ $\quad I = [-3, 3]$

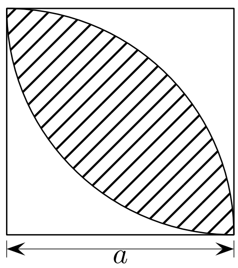
b) $g(x) = x \cdot \lfloor x \rfloor$ $\quad I = [-1; 2]$

c) $h(x) = x + \lfloor x \rfloor$ $\quad I = [-1; 2]$

Bemerkung:
Mit $\lfloor x \rfloor$ wird die größte ganze Zahl bestimmt, die kleiner oder gleich x ist.
Z. B. gilt $\lfloor 2,9 \rfloor = 2$; $\lfloor -1,1 \rfloor = -2$;
$\lfloor 5 \rfloor = 5$; $\lfloor -11 \rfloor = -11$

3.) Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Quadrat mit Seitenlänge a.
Der schraffierte Bereich wird durch zwei Viertelkreisbögen begrenzt, die dem Quadrat einbeschrieben sind.

Berechnen Sie das Verhältnis von schraffierter zu nicht schraffierter Fläche.



4.) Eine Zahlenfolge (a_n) , $n = 1, 2, 3, \cdots$ beginnt mit 2 und hat 524288 als 10. Folgenglied.

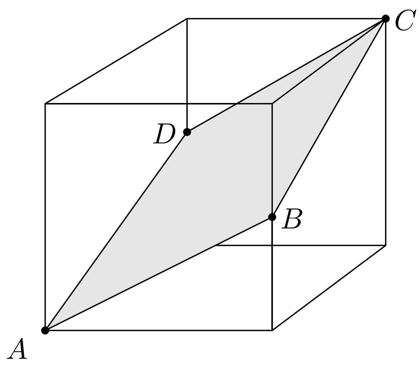
a) Bestimmen Sie die ersten drei Folgenglieder, wenn (a_n) eine *arithmetische Folge* ist.

b) Bestimmen Sie die ersten drei Folgenglieder, wenn (a_n) eine *geometrische Folge* ist.

c) Geben Sie für die Folgen aus $a)$ und $b)$ jeweils die rekursive und die explizite Darstellung an.

Hinweis: Eine Folge heißt arithmetisch (geometrisch), wenn die Differenz (der Quotient) zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist.
Beispiel: Die Folge $(a_n) : 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ \cdots$ ist eine arithmetische Folge.
Ihre rekursive Darstellung lautet $a_{n+1} = a_n + 2,\ a_1 = 5$ und ihre explizite Darstellung lautet $a_n = 3 + 2 \cdot n,\ n = 1;\ 2;\ 3;\ \cdots$.
Die Folge $(b_n) : 5;\ 10;\ 20;\ 40;\ \cdots$ ist eine geometrische Folge.
Ihre rekursive Darstellung lautet $b_{n+1} = b_n \cdot 2,\ b_1 = 5$ und ihre explizite Darstellung lautet $b_n = 5 \cdot 2^{n-1}, n = 1;\ 2;\ 3;\ \cdots$

5.) Die nebenstehende Abbildung zeigt das Kantenmodell eines Würfels mit Kantenlänge 2. Verbindet man darin die Eckpunkte A und C des Würfels mit den benachbarten Kantenmitten B und D, so erhält man das Viereck $ABCD$. Berechnen Sie im Viereck $ABCD$



a) die Längen der Seiten

b) die Längen der Diagonalen

c) die Fläche

d) den Winkel $\alpha = \sphericalangle BAD$

6.) Sei t die Tangente an die Normalparabel mit $f(x) = x^2$ und $P(x_0|x_0^2),\ x_0 > 0$ der *Berührpunkt* von Tangente und Parabel.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t in Abhängigkeit von x_0.

b) Berechnen Sie die Nullstelle der Tangente t in Abhängigkeit von x_0

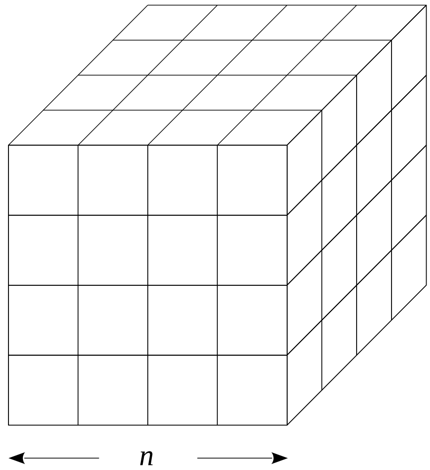
Hinweis: Für die Steigung der Normalparabel an der Stelle x_0 gilt $m = 2x_0$.

7.) a) Vergrößert man x um y Prozent, so erhält man 300.
Verringert man x um y Prozent, so erhält man 180.
Berechnen Sie x und y.

b) i) Eine Glasscheibe der Dicke $d = 0,5\ cm$ lässt 80% des einfallenden Lichtes A_0 durch. Berechnen Sie, wie viel Prozent des einfallenden Lichtes solch eine Scheibe der Dicke $d = 1,5\ cm$ durchlässt.

ii) Beschreiben Sie die Menge des durchgelassenen Lichtes $A(d)$ als Funktion der Form: $A(d) = A_0 \cdot b^x$ mit A_0 : Menge des Lichtes vor der Scheibe, x : Dicke der Scheibe in cm.

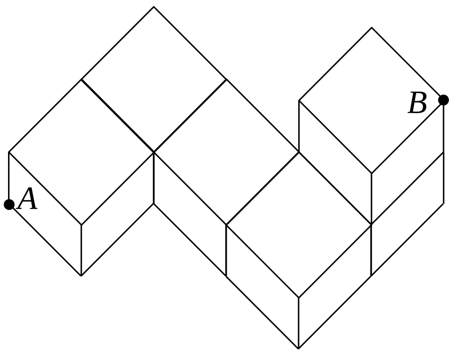
8.) a) Ein hölzerner Würfel mit schwarz gestrichener Oberfläche hat die Kantenlänge n, wobei n eine natürliche Zahl größer als 2 ist.
Durch Schnitte parallel zu den Seitenflächen wird der Würfel in n^3 Würfel mit Kantenlänge 1 zerteilt.



i) Bestimmen Sie, wie viele der n^3 kleinen Würfel genau eine schwarze Fläche und wie viele keine schwarze Fläche haben.

ii) Bestimmen Sie, wie groß n sein muss, damit die Anzahl der Würfel mit genau einer schwarzen Fläche gleich der Anzahl an Würfeln mit keiner schwarzen Fläche ist.

b) Sechs Würfel mit Kantenlänge 1 werden wie abgebildet zusammen geklebt.



i) Bestimmen Sie, wie groß die Oberfläche dieses Körpers ist.

ii) Berechnen Sie den Abstand der Punkte A und B.