Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase am 16. Februar 2022

1. a) Für den Seitenlängen des Dreiecks ΔABC gilt:
$|\overline{AB}| = \sqrt{4,2^2 + 1,4^2} = 5;\quad |\overline{AC}| = \sqrt{2,4^2 + 1,8^2} = 3;\quad |\overline{BC}| = \sqrt{2,4^2 + 3,2^2} = 4$

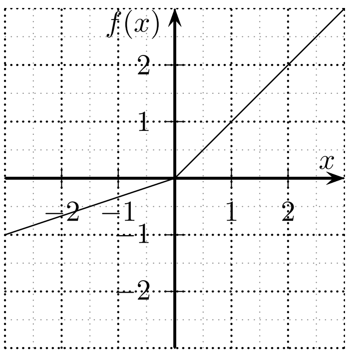
Nach dem Satz des Pythagoras folgt hieraus ein rechter Winkel bei C.

b) Da die Katheten gleichzeitig auch die Höhen sind, gilt: $H = C$
Nach dem Satz des Thales liegt M in der Mitte der Hypotenuse $\Rightarrow \quad M(3 \mid 1,3)$

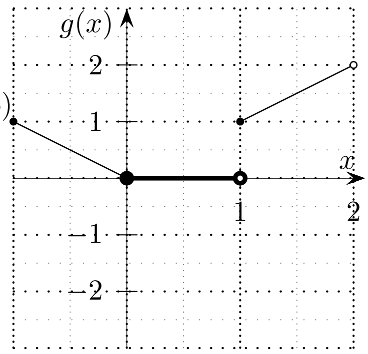
c) $\overline{MC} = \frac{5}{2}$, da M und C in den $x-$Koordinaten übereinstimmen, folgt
$y_S = \frac{13}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{32}{15} \quad \Rightarrow \quad S\left(3 \,|\, \frac{32}{15}\right)$

---

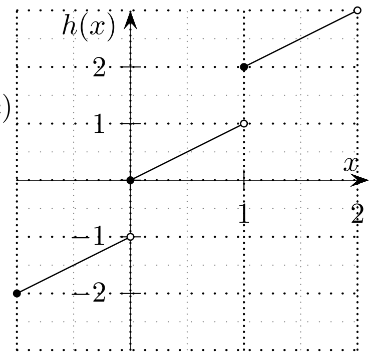
2. a)



b)



c)



---

3. Für den schraffierten Bereich gilt:

$$A_{sch} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\pi \cdot a^2 - \frac{1}{2} \cdot a^2\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \pi - 1\right) \cdot a^2$$

Entsprechend ergibt sich für die nicht schraffierte Fläche:

$$A_{weiß} = a^2 - A_{sch} = a^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \pi - 1\right) \cdot a^2 = \left(2 - \frac{1}{2} \cdot \pi\right) \cdot a^2$$

$$\Rightarrow \frac{A_{sch}}{A_{weiß}} = \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \pi - 1\right) \cdot a^2}{\left(2 - \frac{1}{2} \cdot \pi\right) \cdot a^2} = \frac{\pi - 2}{4 - \pi}$$

4. $A_1 = 2; \qquad a_{10} = 524288$

a) $a_{10} = a_1 + 9 \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = 58254$
$\Rightarrow a_1 = 2;\ a_2 = 58256;\ a_3 = 116510$

b) $a_{10} = a_1 \cdot q^9 \quad \Rightarrow \quad q^9 = 262144 \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[9]{262144} = 4$
$\Rightarrow a_1 = 2;\ a_2 = 8;\ a_3 = 32$

c) *rekursive Darstellungen*
arithmetische Folge: $a_{n+1} = a_n + 58254; \quad a_1 = 2$
geometrische Folge: $a_{n+1} = a_n \cdot 4; \quad a_1 = 2$

explizite Darstellungen
arithmetische Folge: $a_n = 58254 \cdot n - 58252 = 58254 \cdot (n-1) + 2 \qquad n = 1;\ 2;\ 3;\ \cdots$
geometrische Folge: $a_n = 2 \cdot 4^{n-1} \qquad n = 1;\ 2;\ 3;\ \cdots$

---

5. a) Für die Seitenlänge a des Vierecks gilt: $a = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

b) Die Diagonale $\overline{AC}$ ist die Raumdiagonale des Würfels, also gilt $|\overline{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12}$
Die Länge der Diagonalen $\overline{BD}$ ist gleich der Länge der Diagonalen einer Seitenfläche, also gilt $|\overline{BD}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

c) Das Viereck $ABCD$ ist eine Raute, deren Flächeninhalt ergibt sich aus
$A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BD}| = 2 \cdot \sqrt{6}$

d) Die Diagonalen einer Raute sind orthogonal zueinander und halbieren sich gegenseitig.
Somit gilt: $\tan(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\frac{1}{2}|\overline{BD}|}{\frac{1}{2}|\overline{AB}|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \approx 78,5^\circ$

---

6. a) Die allgemeine Gleichung der Tangente lautet $t(x) = m \cdot x + b$ mit $m = 2x_0$ folgt $t(x) = 2x_0 \cdot x + b$
Einsetzen des Punktes $P \quad \Rightarrow x_0^2 = 2x_0 \cdot x_0 + b$, hieraus folgt: $b = -x_0^2$
$\Rightarrow \quad t(x) = 2x_0 \cdot x - x_0^2$

b) Aus $0 = 2x_0 \cdot x - x_0^2$ folgt: $x = -\frac{1}{2}x_0$

7. a) prozentuale Zunahme um y Prozent: $x \cdot \left(1 + \frac{y}{100}\right) = 300\ (I)$
prozentuale Abnahme um y Prozent: $x \cdot \left(1 - \frac{y}{100}\right) = 180\ (II)$

$$
\begin{aligned}
(I):(II) \qquad \frac{1+\frac{y}{100}}{1-\frac{y}{100}} &= \frac{300}{180} \\
\Rightarrow \qquad \frac{100+y}{100-y} &= \frac{5}{3} \\
\Rightarrow \qquad 300+3y &= 500-5y \\
\Rightarrow \qquad 8y &= 200 \\
\Rightarrow \qquad y &= 25
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt mit (I) oder (II): $x = 240$.

b) i) Da jede Scheibe der Dicke $d = 0,5\ cm$ nur 80% des Lichtes durchlässt, lässt eine 3-fach so dicke Scheibe nur $0,8^3 = 0,512 = 51,2\%$ durch.

ii) Es gilt: $A(d) = A_0 \cdot 0,8^{\frac{x}{0,5}} = A_0 \cdot 0,8^{2\cdot x} = A_0 \cdot \left(0,8^2\right)^x = A_0 \cdot 0,64^x$

---

8. a) i) Genau eine schwarze Fläche haben die *inneren* Würfel der Seitenflächen.
Das sind $6 \cdot (n-2)^2$
Keine schwarze Fläche haben alle Würfel, die nicht zur Oberfläche des Würfels gehören.
Das sind $(n-2)^3$

ii) Aus $6 \cdot (n-2)^2 = (n-2)^3 = (n-2)(n-2)^2$ folgt mit Koeffizientenvergleich und der Voraussetzung $n > 2:\quad 6 = n-2$.
Also $n = 8$.

b) i) Die Würfel teilen sich insgesamt $5 \cdot 2 = 10$ Flächen, an denen sie zusammen geklebt sind.
Also beträgt die Oberfläche: $O = 6 \cdot 6 - 2 \cdot 5 = 21\ (cm^2)$

ii) Der Abstand der Punkte A und B entspricht der Länge der Raumdiagonalen eines Quaders mit Seitenlängen $a = b = 3$ und $c = 2\ (cm)$.
Also gilt: $|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{22}\ (cm)$