MW-E
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase

<u>Hinweis:</u> Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. Gegeben ist das Dreieck ΔABC mit $A(-4|-3)$, $B(5|-3)$ und $C(0|5)$.

   a) Zeichnen Sie das Dreieck in ein geeignete Koordinatensystem und geben Sie eine Gleichung der Gerade g durch die Punkte A und C an.

   b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes B', der sich aus der Spiegelung des Punktes B an der Geraden g ergibt.

   c) Berechnen Sie den Umfang un den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

---

2. Zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen im jeweils angegebenen Intervall.

   a) $f(x) = x \cdot sign(x) \qquad I = [-2, 2]$

   b) $g(x) = \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \qquad I = [1; 4[$

   c) $h(x) = x - \lfloor x \rfloor \qquad I = [-1; 2[$

Bemerkung:
Mit $\lfloor x \rfloor$ wird die größte ganze Zahl bestimmt, die kleiner oder gleich x ist.
Z. B. gilt $\lfloor 2,9 \rfloor = 2$; $\lfloor -1,1 \rfloor = -2$; $\lfloor 5 \rfloor = 5$

Die *Vorzeichen-* oder Signumfunktion *sign* ist definiert durch:

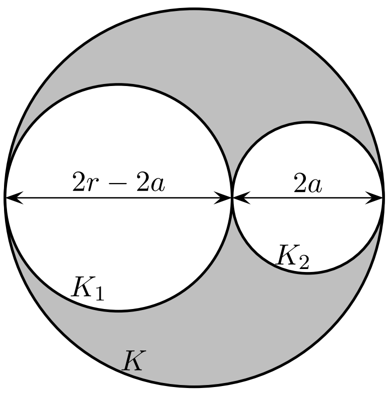
$$sign(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

---

3. Gegeben ist eine Kugel K mit Radius r.
Innerhalb von K liegen zwei Kugeln K_1 und K_2 mit den Radien a bzw. $r-a$, die sich von außen berühren (s. Abb.).

   a) Bestimmen Sie a so, dass das Volumen der beiden Kugeln K_1 und K_2 in Summe genau so groß ist, wie das restliche Volumen der Kugel K ohne K_1 und K_2.

   b) Bestimmen Sie a so, dass die Summe der beiden Oberflächen von K_1 und K_2 minimal wird.



4. Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n=1,\ 2,\ 3,\cdots}$ mit $a_1 = -6,\ a_2 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} + a_n)\ ,\ n \geq 2.$

   a) Berechnen Sie a_3, a_4 und a_5.

   b) Geben Sie eine explizite Darstellung der Folge (a_n) an.(Siehe Hinweis)

   c) Zeigen Sie, dass (a_n) eine *geometrische* Folge ist.

Hinweis: Eine Folge heißt geometrisch, wenn der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder konstant ist.
Beispiel: Die Folge $(a_n) : 5,\ 10,\ 20,\ 40,\ \cdots$ ist eine geometrische Folge.
Ihre rekursive Darstellung lautet $a_{n+1} = a_n \cdot 2,\ a_1 = 5$ und ihre explizite Darstellung lautet $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}, n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$

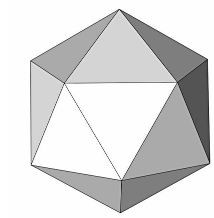
---

5. a) Einer Kugel wird ein Würfel einbeschrieben (der Würfel liegt im Inneren der Kugel und berührt deren Oberfläche mit allen 8 Ecken) und ein Würfel umbeschrieben (der Würfel berührt die Kugel mit allen 6 Seiten).
   Der äußere Würfel hat die Oberfläche $O_1 = 24\ cm^2$.

   Berechnen Sie die Oberfläche des einbeschriebenen Würfels?

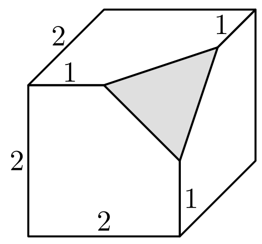
   b) Ein Ikosaeder wird durch 20 gleichseitige Dreiecke begrenzt. Ein Ikosaederstern entsteht dadurch, dass man auf jeder Fläche eine dreiseitige Pyramide errichtet.

   Bestimmen Sie die Anzahl der Kanten des Ikosaedersterns.



   c) Bei einem hohlen Würfel wird eine Ecke so abgeschnitten, dass ein dreieckiges Loch entsteht.
   Der Schnitt geht durch die Mitten von drei benachbarten Kanten (siehe Abb.).

   Berechnen Sie die Oberfläche des restlichen Körpers.



---

6. Sei t die Tangente an die *Normalparabel* $n-$*ter Ordnung* mit $f(x) = x^n\ ,\ n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ und $P(x_0|x_0^n),\ x_0 > 0$ der *Berührpunkt* von Parabel und Tangente.

   a) Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t in Abhängigkeit von x_0.

   b) Berechnen Sie die Nullstelle der Tangente t in Abhängigkeit von x_0.

   Hinweis: Für die Steigung der *Normalparabel* $n-$*ter Ordnung* an der Stelle x_0 gilt $m = n \cdot x_0^{n-1}$.

7. a) Ein Algenteppich vergrößert sich mit einem konstanten Wachstumsfaktor so, dass sich die Fläche, die er bedeckt, alle 20 Tage verdoppelt.

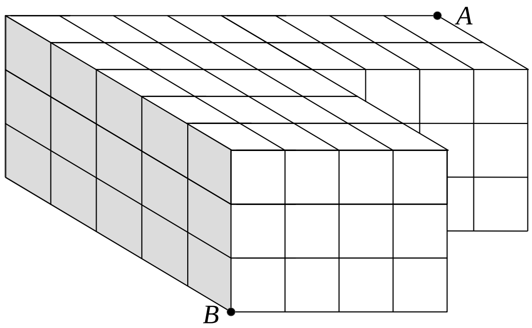
   Bestimmen Sie die tägliche prozentuale Flächenzunahme.

   b) Ein kugelförmiger Schneeball verliert beim Schmelzen pro Stunde 20% seines Volumens.

   Berechnen Sie, um wie viel Prozent sich seine Oberfläche pro Stunde verringert, wenn man davon ausgehen kann, dass die Kugelform erhalten bleibt.

---

8. Ein L-förmiger Körper wird wie abgebildet aus 84 weißen Einheitswürfeln gebildet.



   a) Ermitteln Sie die Oberfläche des Körpers.

   b) Berechnen Sie den Abstand der beiden Punkte A und B.

   c) Die Oberfläche des L-förmigen Körpers wird schwarz gestrichen.
   Bestimmen Sie die Anzahl der Einheitswürfel, die keine schwarze Fläche haben.

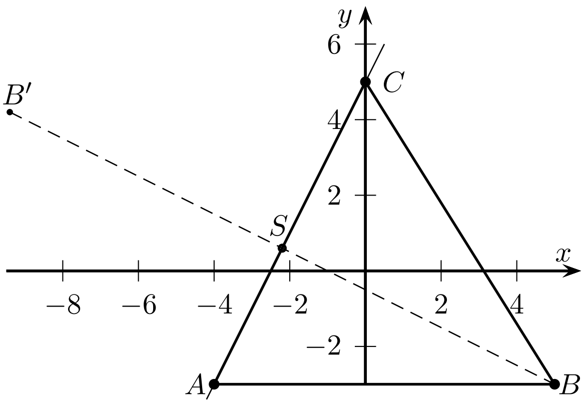
Lösungen zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2022

1. ΔABC mit $A(-4|-3)$, $B(5|-3)$, $C(0|5)$ 4P.

   a) $g(x) = 2x + 5$

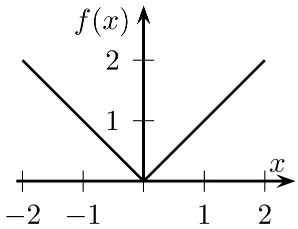
   b) Die Höhe durch B liegt auf 4P.
   $h(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$
   $\Rightarrow S\left(-\frac{11}{5}\middle|\frac{3}{5}\right) \quad \Rightarrow B'\left(-\frac{47}{5}\middle|\frac{21}{5}\right)$

   c) $U = 9 + \sqrt{5^2 + 8^2} + \sqrt{4^2 + 8^2} = 9 + \sqrt{89} + \sqrt{80} \approx 27,39\ (LE)$ 4P.
   $A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36\ (FE)$

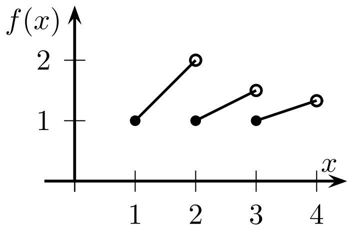


---

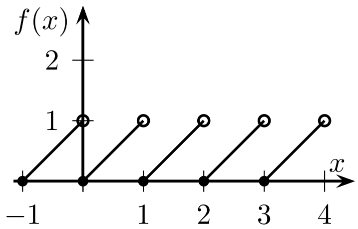
2. a) 4P.



   b) 4P.



   c) 4P.



---

3. a) Es gilt: $V_K - (V_{K1} + V_{K2}) = V_{K1} + V_{K2} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{8}{3}\pi \cdot \left((r-a)^3 + a^3\right)$ 6P.
   $\Rightarrow \frac{1}{2}r^3 = r^3 - 3r^2a + 3ra^2 - a^3 \quad \Rightarrow \quad 3r \cdot \left(a^2 - r \cdot a + \frac{1}{6}r^2\right) = 0$
   $r > 0 \quad \Rightarrow a^2 - r \cdot a + \frac{1}{6}r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}$

   b) $O = 4\pi a^2 + 4\pi(r-a)^2 = 4\pi \cdot \left(2a^2 - 2ra + r^2\right) = 8\pi \cdot \left((a - \frac{1}{2}r)^2 + \frac{1}{4}r^2\right)$ 6P.
   Also wird die Oberfläche für $a = \frac{1}{2}r$ minimal, d. h. beide inneren Kugeln sind gleich groß.

4. a) $a_1 = -6,\ a_2 = 3, a_3 = -\frac{3}{2},\ a_4 = \frac{3}{4},\ a_5 = -\frac{3}{8}$ 4P.

b) $(a_n)_{n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots} = (-1)^n \cdot \frac{6}{2^{n-1}}$ 4P.

c) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{6}{2^n}}{(-1)^n\cdot\frac{6}{2^{n-1}}} = -\dfrac{2^{n-1}}{2^n} = -\dfrac{1}{2}$ 4P.

---

5. a) Sei a die Kantenlänge des großen und b die Kantenlänge des kleinen Würfels.
Aus $O_1 = 24 = 6\cdot a^2$ folgt $a = 2$. Somit ist der Durchmesser der Kugel $d = a = 2$. 4P.
Der Durchmesser der Kugel entspricht der Raumdiagonalen des kleinen Würfels, also gilt: $d^2 = 3\cdot b^2\ \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3}$
Hieraus folgt für die Oberfläche des kleineren Würfels: $O_2 = 6\cdot b^2 = 8\ (FE)$

b) Das Ikosaeder hat $\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 3 = 30$ Kanten. Durch die aufgesetzten Pyramiden kommen nochmals $20\cdot 3 = 60$ Kanten hinzu. 4P.
Somit hat der Ikosaederstern insgesamt: $30 + 60 = 90$ Kanten.

c) Der Würfel hat die Oberfläche $O_1 = 6\cdot 2^2 = 24\ (FE)$. 4P.
Durch die abgeschnittene Pyramide verringert sich diese um $A = 3\cdot\frac{1}{2}\cdot^2\ \ (FE)$
Somit hat der restliche Körper die Oberfläche $O_2 = 24 - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{45}{2}\ (FE)$.

---

6. a) $t(x) = m\cdot x + b = (n\cdot x_0^{n-1})\cdot x + b\ \Rightarrow\ x_0^n = (n\cdot x_0^{n-1})\cdot x_0 + b\ \Rightarrow\ b = (1-n)\cdot x_0^n$ 6P.
$t(x) = (n\cdot x_0^{n-1})\cdot x + (1-n)\cdot x_0^n = x_0^{n-1}\cdot(n\cdot x + (1-n)\cdot x_0)$

b) $t(x) = 0\ \Rightarrow\ (n\cdot x + (1-n)\cdot x_0) = 0\ \Rightarrow\ x = \dfrac{n-1}{n}\cdot x_0$ 6P.

---

7. a) Sei A_0 die Fläche des Algenteppichs zu Beginn und $A(t)$ seine Fläche zum Zeitpunkt t.
$\Rightarrow A(t) = A_0\cdot 0,8^{\frac{t}{20}} = A_0\cdot\left(0,8^{\frac{1}{20}}\right)^t \approx A_0\cdot 1,0353^t$ 6P.
Hieraus folgt, dass die Fläche des Algenteppichs pro Tag um ca. $3,53\ \%$ zunimmt.

b) Sei r_0 der Radius des Schneeballs zu Beginn und $r(t)$ bzw. $V(t)$ sein Radius bzw. sein Volumen zum Zeitpunkt t.
$\Rightarrow V(t) = \frac{4}{3}\pi\cdot r_0^3\cdot 0,8^t = \frac{4}{3}\pi\cdot r(t)^3\ \Rightarrow r(t) = r_0\cdot 0,8^{\frac{t}{3}} = r_0\cdot\left(0,8^{\frac{1}{3}}\right)^t$ 6P.
Hieraus folgt für seine Oberfläche zum Zeitpunkt t :
$O(t) = 4\pi\cdot r(t)^2 = 4\pi\cdot r_0^2\cdot\left(0,8^{2/3}\right)^t = O_0\cdot\left(0,8^{2/3}\right)^t \approx O_0\cdot 0,862^t$
Also nimmt sein Oberfläche pro Stunde um ca. $13,8\ \%$ ab.

8. a) $O = 2 \cdot (3 \cdot 5 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2) = 134\ (cm^2)$ 4P.

b) Der Abstand der Punkte A und B entspricht der Länge der Raumdiagonale eine Quaders mit Kantenlängen $a = 8,\ b = 5,\ c = 3\ (cm)$ 4P.
$\Rightarrow d(A, B) = \sqrt{8^2 + 5^2 + 3^2} = 7\sqrt{2}.$

c) In der Abbildung ist der Bereich des Körpers in der Draufsicht grau markiert, in dem die Würfel liegen, die keine schwarze Fläche haben. 4P.
Dieser Bereich liegt in der mittleren Ebenen des Körpers.

Somit haben 7 Würfel keine schwarzen Flächen.