

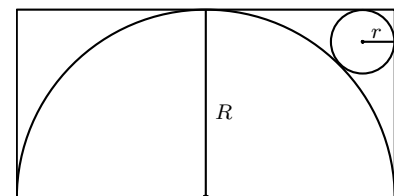
Musteraufgaben zum  
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase am 17. Februar 2021

**Hinweis:** Beim Mathematikwettbewerb MW-E der Einführungsphase werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt. Der Lösungsweg muss dabei klar erkennbar sein.  
Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 01. Februar 2021 unter <http://www.z-f-m.de> im Bereich Projekte – MW-E.

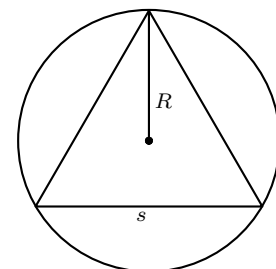
- 1.) Ein Kreis im Koordinatensystem schneidet die  $x$ -Achse in  $(18|0)$  und berührt die  $y$ -Achse in  $(0|6)$ .  
Berechnen Sie den Kreisradius  $r$ .

- 2.) a) Für welches  $x$  gilt:  $3^x = \frac{\sqrt{3} \sqrt[4]{9}}{27}$  ?  
b) Für welche  $y$  gilt:  $3^{2y} + 9 = 10 \cdot 3^y$  ?  
Berechnen Sie.

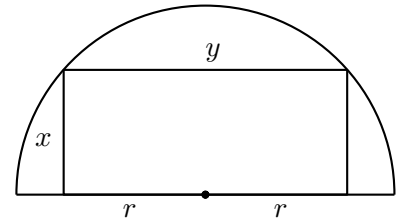
- 3.) a) Ein Halbkreis in einem Rechteck habe den Radius  $R$ .  
Zwischen dem Halbkreis und dem Rechteck ist ein Kreis mit Radius  $r$  einbeschrieben.  
(siehe Abbildung)  
Berechnen Sie  $\frac{R}{r}$ .



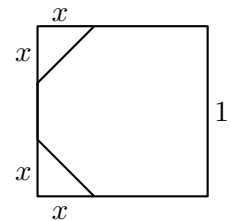
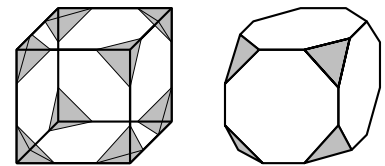
- b) Ein gleichseitiges Dreieck habe den Umkreisradius  $R$ .  
Berechnen Sie die Seitenlänge  $s$  des Dreiecks.



- 4.) Wie muss in einem Halbkreis (Radius  $r$ ) das einbeschriebene Rechteck mit den Seiten  $x$  und  $y$  gewählt werden, damit die Fläche  $F = x \cdot y$  maximal wird?  
(siehe Abbildung)



- 5.) Schneidet man von einem Würfel die acht Ecken ab, so dass aus den Flächen Achtecke entstehen, so erhält man einen abgestumpften Würfel.  
(siehe Abbildung)
- a) Bestimmen Sie die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten des abgestumpften Würfels.
- b) Bestimmen Sie  $x$  so, dass das Achteck gleich lange Seiten hat.  
(siehe Abbildung)



- 6.) a) Für eine Funktion  $f$  gilt

$$f(x) + 2 \cdot f\left(\frac{2021}{x}\right) = 3x, \quad x > 0.$$

Berechnen Sie  $f(43)$  und  $f(47)$ .

*Hinweis:*  $2021 = 43 \cdot 47$

- b) Für eine Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  gilt

$$g(1) = 1 \text{ und } g(n) = \begin{cases} g\left(\frac{n}{3}\right) & \text{für } 3|n \\ g(n-1) + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie  $g(2021)$ .

*Hinweis:* Zum Beispiel gilt

$$g(42) = g(14) = g(13) + 1 = g(12) + 2 = g(4) + 2 = g(3) + 3 = g(1) + 3 = 4$$

- 7.) a) Berechnen Sie für welches  $n$  die Gleichung  $(n + 1)! - n! = 4320$  erfüllt ist.

*Hinweis:*

Für jede natürliche Zahl  $n$  ist die Fakultät von  $n$  definiert als:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

- b) Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 wird 2-mal geworfen.  
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme durch 5 teilbar ist.
- 

- 8.) 4 Pferde fressen in 5 Tagen 40 kg Hafer.

Bestimmen Sie, wie viel Hafer 16 Pferde in 15 Tagen fressen.