Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2020

Hinweis: Beim Mathematikwettbewerb MW-E der Einführungsphase werden Aufgaben zur Auswahl angeboten, wobei von acht Aufgaben fünf gewertet werden. Wurden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden die Aufgaben mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss dabei klar erkennbar sein.
Die folgenden acht Aufgaben sollen einen Eindruck vermitteln, welche Kenntnisse und Fähigkeiten beim Wettbewerb erforderlich sind. Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte (Zirkel, Lineal und Geodreieck). Die Lösungen zu den Musteraufgaben gibt es ab 01.Februar 2020 unter http:www.z-f-m.de im Bereich Projekte – MW-E.

1.) Für welches m haben die drei Geraden
$y = x + 1$, $y = mx - 1$ und $y = -2x + 2m$ einen gemeinsamen Schnittpunkt S?

Berechnen Sie die Schnittpunkte.

2.) Bestimmen Sie alle x, für die gilt:

$$(x^2 - 7x + 11)^{x^2-13x+42} = 1.$$

Hinweis: Sind a und b reelle Zahlen mit $a^b = 1$, so sind drei Fälle möglich:

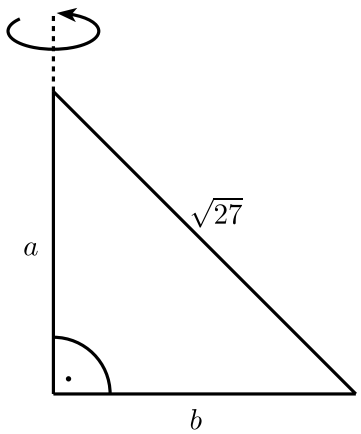
i) $b = 0$, a beliebig

ii) $a = 1$, b beliebig

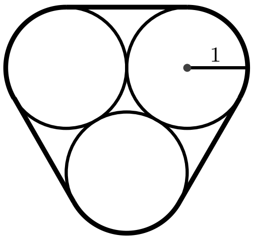
iii) $a = -1$, b gerade

3.) Ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ rotiert um die Kathete a, so dass ein Kegel mit der Höhe a und dem Radius b entsteht.
Wie müssen a und b gewählt werden, damit das Kegelvolumen V maximal wird?

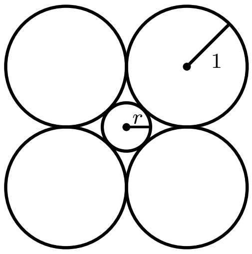
Hinweis: Zur Berechnung des Maximums ohne Differenzialrechnung ist die Formel
$27x - x^3 = 54 - (x-3)^2(x+6)$ hilfreich.



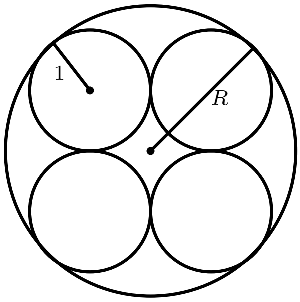
4.) a) Drei Rohre (Durchmesser 2 m) werden mit einem Seil zusammen gehalten. Berechnen Sie die Seillänge.



b) Gegeben sind vier Kreise (Radius 1), deren Mittelpunkte ein Quadrat mit Seitenlänge 2 bilden. Berechnen Sie den Radius des Kreises, der die vier vorgegebenen Kreis berührt:



(i) "Inkreis"-Radius r.



(ii) "Umkreis"-Radius R.

5.) Ein Fußball besteht aus 12 Fünfecken und 20 Sechsecken.

a) Wie viele Ecken und Kanten hat der Fußball?

b) Wie viele Diagonalen hat dieser Körper?

c) Wie viele dieser Diagonalen sind Raumdiagonalen, verlaufen also ganz im Innern des Fußballs?

6.) a) Zeichnen Sie die beiden Geraden

$$g: \; y = 2x + 1 \text{ und } h: \; y = 6x - 2$$

in ein Koordinatensystem und berechnen Sie den Schnittpunkt S.

b) Berechnen Sie die Fläche F zwischen g, h und der y-Achse.

c) Alle Geraden durch S haben die Gleichung:
$y = k(2x + 1) + (1 - k)(6x - 2)$, k reell.

Berechnen Sie die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b dieser Geraden in Abhängigkeit von k.

7.) a) Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folge

$$a_n = \begin{cases} 0 & , \ n = 0 \\ 1 & , \ n = 1 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} & , \ n > 1 \end{cases}$$

b) Berechnen Sie die Folge $b_n = a_n + a_{n+1}$, $n = 0, 1, \cdots$ und vergleichen Sie diese mit den Potenzen von 2.
Welche Rekursionsformel folgt hieraus für a_n?
Hinweis: Die Angabe der Berechnung von a_n mit Hilfe vorangegangener Folgenglieder bezeichnet man als Rekursionsformel.

c) Berechnen Sie die Folge $c_n = a_{n+1} - 2a_n$, $n = 0, 1, \cdots$
Welche Rekursionsformel für a_n folgt hieraus?

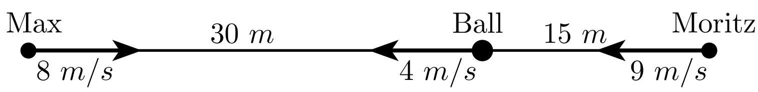
d) Berechnen Sie die Folge $d_n = a_n \ mod \ 3$, d. h. d_n ist der Rest von a_n bei der Division durch 3.
Berechnen Sie d_{2020}.

e) Berechnen Sie die Folge $e_n = \dfrac{2^n - (-1)^n}{3}$, $n = 0, 1, \cdots$ und vergleichen Sie e_n mit a_n.

8.) a) Claus und Uwe laufen mit konstanter Geschwindigkeit, aber Claus ist k-mal schneller als Uwe ($k > 1$).
Claus gibt Uwe einen Vorsprung von m Metern.

Welche Strecke s muss Claus laufen um Uwe einzuholen?
Berechnen Sie s in Abhängigkeit von k und m.

b) Max und Moritz spielen Fußball. Der Ball befindet sich zwischen Max und Moritz, und zwar 30 m von Max und 15 m von Moritz entfernt.



Der Ball rollt mit 4 m/s auf Max zu, der mit 8 m/s auf den Ball zuläuft.
Moritz läuft mit 9 m/s dem Ball hinterher.

Berechnen Sie, wer den Ball zuerst erreicht.
Wie weit sind dann Max und Moritz voneinander entfernt?