MW-E

Mathematikwettbewerb der Einführungsphase

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. Für welches m haben die drei Geraden
$y = x + 1$, $y = mx - 1$ und $y = -17x + m$
einen gemeinsamen Schnittpunkt S?

Berechnen Sie die Schnittpunkte.

---

2. Bestimmen Sie alle x, für die gilt:

$$(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1.$$

Hinweis: Sind a und b reelle Zahlen mit $a^b = 1$, so sind drei Fälle möglich:

(i) $b = 0$, a beliebig

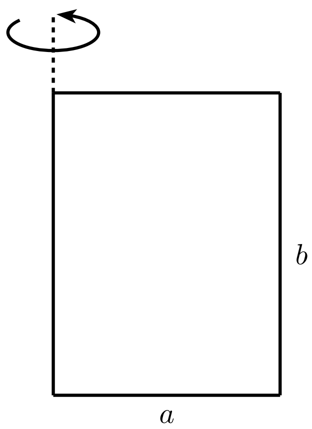
(ii) $a = 1$, b beliebig

(iii) $a = -1$, b gerade

---

3. Ein Rechteck mit den Seiten a und b und dem Umfang 6 rotiert um b, so dass ein Zylinder mit Höhe b und Radius a entsteht
Wie müssen a und b gewählt werden, damit das Volumen V des Zylinders maximal wird?

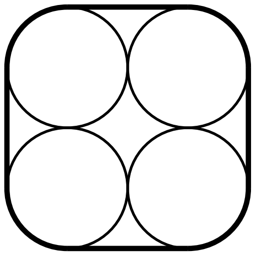
Hinweis: Zur Berechnung des Maximums ohne Differenzialrechnung ist die Formel $3x^2 - x^3 = 4 - (x-2)^2(x+1)$ hilfreich.



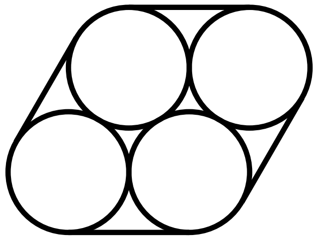
$2a + 2b = 6$

4. a) Vier Röhren (Durchmesser 2 m) werden mit einem Seil zusammen gehalten.

(i)



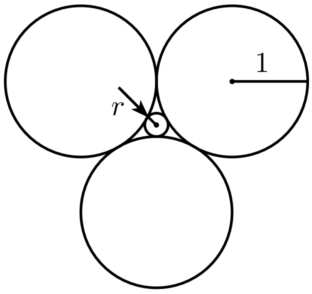
(ii)



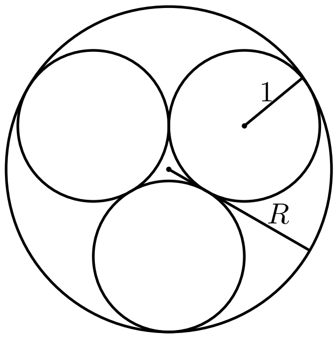
Berechnen Sie in beiden Fällen die Seillänge.

b) Gegeben sind drei Kreise (Radius 1), die sich gegenseitig berühren.

(i) Welchen Radius r hat der kleine Kreis (”Inkreis”)?

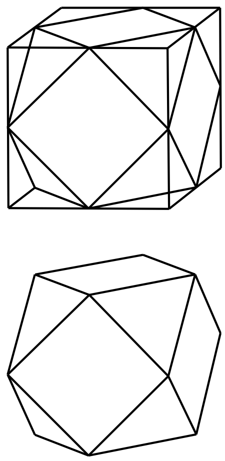


(ii) Welchen Radius R hat der große Kreis (”Umkreis”)?



---

5. Ein Kuboktaeder ist ein Körper, der aus einem Würfel entsteht, wenn man an den Würfelecken Pyramiden abschneidet.



a) Wie viele Flächen, Ecken und Kanten hat das Kuboktaeder?

b) Wie viele Diagonalen hat dieser Körper?

c) Wie viele dieser Diagonalen sind Raumdiagonalen, verlaufen also ganz im Inneren des Kuboktaeders?

6. a) Zeichnen Sie die beiden Geraden
$g:\ 2y + x + 1 = 0$ und $h:\ y - 3x + 4 = 0$
in ein Koordinatensystem und berechnen Sie den Schnittpunkt S.

b) Berechnen Sie die Fläche F zwischen g, h und der x-Achse.

c) Alle Geraden durch S haben die Gleichung:
$a(2y + x + 1) + b(y - 3x + 4) = 0,\ a, b$ reell.

Berechnen Sie die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c dieser Geraden in Abhängigkeit von a und b.

---

7. a) Berechnen Sie die ersten zehn Glieder der Folge

$$a_n = \begin{cases} 2 & ,\ n = 0 \\ 1 & ,\ n = 1 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2} & ,\ n > 1 \end{cases}$$

b) Berechnen Sie die Folge $b_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{3}$, $n = 0, 1, \cdots$ und vergleichen Sie diese mit den Potenzen von 2.
Welche Rekursionsformel folgt hieraus für a_n?
Hinweis: Die Angabe der Berechnung von a_n mit Hilfe vorangegangener Folgenglieder bezeichnet man als Rekursionsformel.

c) Berechnen Sie die Folge $c_n = a_{n+1} - 2a_n$, $n = 0, 1, \cdots$
Welche Rekursionsformel für a_n folgt hieraus?

d) Berechnen Sie die Folge $d_n = a_n \ mod\ 5$, d. h. d_n ist der Rest von a_n bei der Division durch 5.
Berechnen Sie d_{2020}.

e) Berechnen Sie die Folge $e_n = 2^n + (-1)^n$, $n = 0, 1, \cdots$ und vergleichen Sie e_n mit a_n.

---

8. a) Wenn Suzan mit a km/h zur Arbeit fährt, kommt sie eine Stunde zu spät.
Wenn sie mit b km/h zur Arbeit fährt, kommt sie eine Stunde zu früh.

Berechnen Sie - in Abhängigkeit von a und b - wie weit Suzan von ihrem Arbeitsplatz entfernt wohnt.

b) Claus und Uwe starten gleichzeitig in A-Dorf in Richtung B-Dorf.
Claus fährt mit 40 km/h von A nach B und sofort zurück nach A.
Uwe fährt mit 60 km/h von A nach B und sofort mit v km/h nach A zurück.
Beide kommen zur gleichen Zeit in A an.

Mit welcher Geschwindigkeit v ist Uwe von B nach A gefahren?

Lösungen zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2020

1. Aus $x+1 = m\,x-1$ folgt $x = \frac{2}{m-1}$.

   Aus $x+1 = -17\,x+m$ folgt $x = \frac{m-1}{18}$.

   Aus $\frac{2}{m-1} = \frac{m-1}{18}$ folgt $m = 1 \pm 6$. 12P.

   Für $m = 7$ folgt $S\left(\frac{1}{3}\middle|\frac{4}{3}\right)$.

   Für $m = -5$ folgt $S\left(-\frac{1}{3}\middle|\frac{2}{3}\right)$.

---

2. (i) Aus $0 = x^2 - 9x + 20 = (x-4)(x-5)$ folgt $x = 4$ oder $x = 5$.

   (ii) Aus $x^2 - 5x + 5 = 1$ und somit $0 = x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$ folgt $x = 4$ oder $x = 1$. 12P.

   (iii) Aus $x^2 - 5x + 5 = -1$ und somit $0 = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ folgt $x = 2$ oder $x = 3$.
   Sowohl für $x = 2$ als auch für $x = 3$ ist $x^2 - 9x + 20$ gerade.

   Somit gilt die Gleichung für $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

---

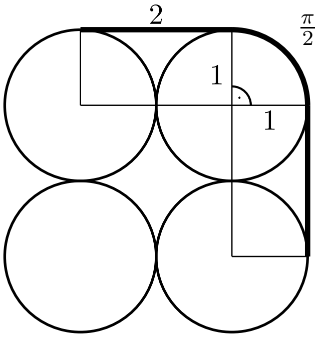
3. Mit $a + b = 3$ gilt $V = \pi a^2 b = \pi\left(3a^2 - a^3\right)$

   i) Ohne Differenzialrechnung
   $V = \pi\left(3a^2 - a^3\right) = \pi\left(4 - (a-2)^2(a+1)\right)$ ist maximal für $a = 2$ und somit $b = 1$. 12P.

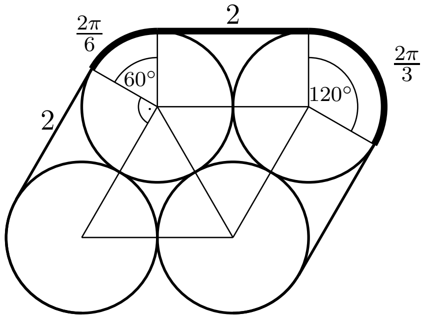
   ii) Aus $V' = \pi\left(6a - 3a^2\right) = 0$ folgt $a = 2$ und $b = 1$.
   Wegen $V'' = \pi(6 - 6a) < 0$ für $a = 2$ ist $a = 2$ ein Maximum.

---

4. a)



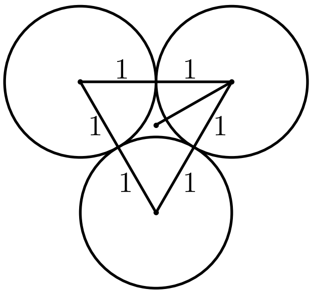
$\left(2+\frac{\pi}{2}\right)\cdot 4 = 8+2\pi$



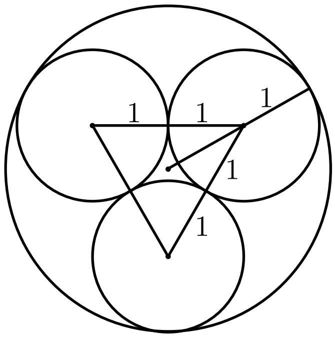
$2\left(2+\frac{2\pi}{3}\right)+2\left(2+\frac{2\pi}{6}\right) = 8+2\pi$

6P.

b)



$r = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}-1$



$R = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}+1$

6P.

---

5. Ein Kuboktaeder besteht aus 6 Vierecken und 8 Dreiecken.

a) Anzahl der Flächen $6+8=14$

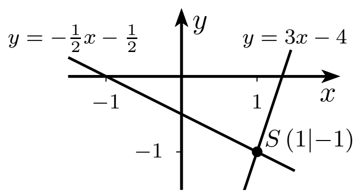
Anzahl der Ecken $\frac{1}{4}\cdot(6\cdot 4+8\cdot 3)=12$ 4P.

Anzahl der Kanten $\frac{1}{2}\cdot(6\cdot 4+8\cdot 3)=24$

b) Von jeder Ecke gehen $11-4$ Diagonalen aus, also gibt es insgesamt $\frac{1}{2}\cdot 12\cdot(11-4)=42$ Diagonalen. 4P.

c) Ein Viereck hat zwei Diagonalen, ein Dreieck keine. 4P.
Also hat das Kuboktaeder $6\cdot 2=12$ Flächendiagonalen und somit $42-12=30$ Raumdiagonalen.

6. a)



4P.

b) $F = KAI\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{3}\right)\cdot 1 = \frac{7}{6}$ 4P.

c) Aus $a\,(2y+x+1)+b\,(y-3x+4)=0$ folgt

$y = mx + b$ mit $m = \dfrac{3b-a}{2a+b}$ und $c = -\dfrac{4b+a}{2a+b}$ 4P.

---

7. a) $a_n:\ 2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, \cdots$ 2P.

b) $b_n:\ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256\cdots$ 3P.
Aus $b_n = \dfrac{1}{3}(a_n + a_{n+1}) = 2^n$ folgt $a_{n+1} = 3\cdot 2^n - a_n$

c) $c_n:\ 3, -3, 3, -3, 3, \cdots$ 3P.
Aus $c_n = a_{n+1} - 2a_n = -3(-1)^n$ folgt $a_{n+1} = 2a_n - 3(-1)^n$

d) $d_n:\ 2, 1, 0, 2, 2, 1, 0, 2, 2, 1\cdots$ 3P.
d_n ist periodisch mit Periodenlänge 4. Wegen $2020 = 4\cdot 505$ ist $d_{2020} = d_0 = 2$

e) $e_n:\ 2, 1, 5, 17, \cdots$ 1P.
Es ist $e_n = a_n$.

---

8. a) Sei s der Weg zur Arbeit und t die benötigte Fahrtzeit.

Aus $t+1 = \frac{s}{a}$ und $t-1 = \frac{s}{b}$ folgt $s = \dfrac{2ab}{b-a}$. 6P.

b) Sei s die Entfernung von A nach B.

Fahrtzeit von Claus $\dfrac{s}{40} + \dfrac{s}{40} = \dfrac{s}{20}$ 6P.

Fahrtzeit von Uwe $\dfrac{s}{60} + \dfrac{s}{v}$

Aus $\dfrac{s}{60} + \dfrac{s}{v} = \dfrac{s}{20}$ folgt $v = 30\ \ [km/h]$