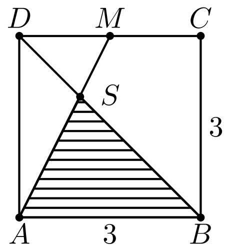
MW-E
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase

Hinweis: Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

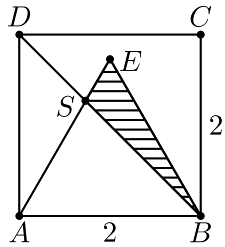
1. a) Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ (Seitenlänge 3), der Mittelpunkt M von CD und der Schnittpunkt S von AM und BD.

   Berechnen Sie die Fläche F des Dreiecks ABS.



   b) Gegeben ist ein Quadrat $ABCD$ (Seitenlänge 2), das gleichseitige Dreieck ABE und der Schnittpunkt S von AE und BD.

   Berechnen Sie die Fläche F des Dreiecks BES.



---

2. a) Berechnen Sie

$$\frac{(6!+5!)(5!+4!)(4!+3!)(3!+2!)(2!+1!)}{(6!-5!)(5!-4!)(4!-3!)(3!-2!)(2!-1!)}$$

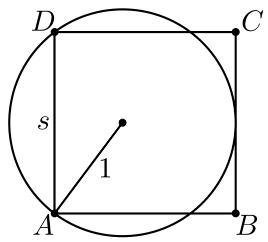
   Hinweis: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots \ \cdot n$

   b) Bestimmen Sie die kleinste Zahl in der Folge

$$\sqrt{\tfrac{5}{3}}+\sqrt{\tfrac{12}{5}}\,,\ \sqrt{\tfrac{6}{3}}+\sqrt{\tfrac{12}{6}}\,,\ \cdots\,,\ \sqrt{\tfrac{n}{3}}+\sqrt{\tfrac{12}{n}}\,,\ \cdots\,,\ \sqrt{\tfrac{93}{3}}+\sqrt{\tfrac{12}{93}}\,.$$

3. a) Bei einem Quadrat $ABCD$ liegen A und D auf einem Kreis (Radius 1), der BC berührt.

Berechnen Sie die Seite s des Quadrates.

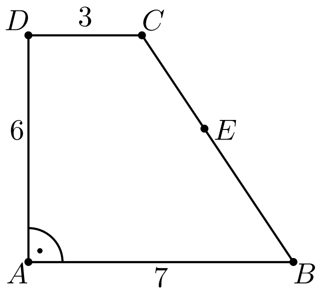


b) Gegeben ist das abgebildete Trapez $ABCD$.

(i) Berechnen Sie BC und die Fläche F des Trapezes.

(ii) Wie muss E auf BC gewählt werden, damit AE die Trapezfläche halbiert.

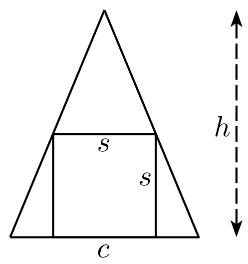
Berechnen Sie BE.



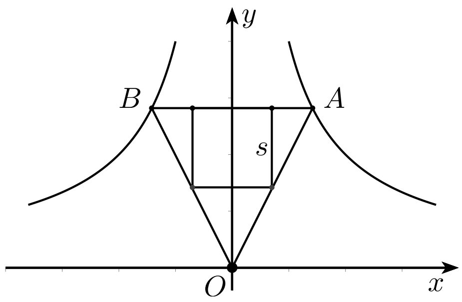
---

4. a) Zeigen Sie, dass in einem gleichschenkligen Dreieck mit Basis c und der zugehörigen Höhe h für die Seite s des sog. Basisquadrats gilt:

$$s = \frac{c \cdot h}{c + h}\ .$$



b) Im x-y-Koordinatensystem sind gleichschenklige Dreiecke ABO gegeben, mit $O(0|0)$, A und B auf den Graphen von $y = \frac{1}{x}$ bzw. $y = -\frac{1}{x}$.

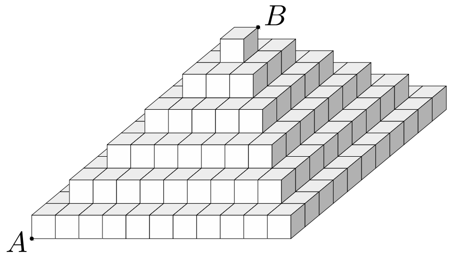


(i) Berechnen Sie die Seite s des Basisquadrates in Abhängigkeit von x.

(ii) Für welches x ist $s(x)$ maximal?

Hinweis: Es gilt $a + \frac{1}{b} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2 + 2\sqrt{\frac{a}{b}}$

5. Eine Pyramide aus Einheitswürfeln ist in quadratischen Schichten aufgebaut.
Die oberste Schicht besteht aus $1 \cdot 1 = 1$ Würfeln, die zweite aus $3 \cdot 3 = 9$ Würfeln und die Schicht darunter aus $5 \cdot 5 = 25$ Würfeln, usw.
Die Pyramide besteht aus 6 Schichten.



a) Aus wie vielen Würfeln besteht die Pyramide?

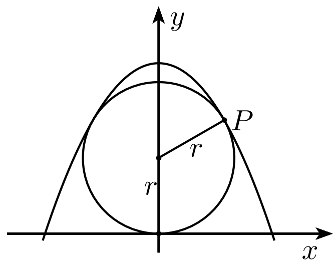
b) Wie groß ist die Oberfläche der Pyramide einschließlich des Bodens?

c) Berechnen Sie den Abstand von A und B.

---

6. Gegeben ist die Parabel $y = -x^2 + \frac{9}{4}$.

Gesucht ist der größte Kreis oberhalb der x-Achse und unterhalb der Parabel.
Berechnen Sie den Radius r und den Berührpunkt P im 1. Quadranten.



---

7. Anton und Berta verabreden ein Treffen zwischen 12 und 13 Uhr am Brunnen unter der Dorflinde.
Beide vergaßen allerdings den genauen Zeitpunkt des Treffens, so dass jeder zufällig im verabredeten Zeitraum kommt.
Angenommen jeder wartet 10 Minuten nach der Ankunft und geht dann wieder.

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass sich beide treffen?

---

8. Anton hat eine Modelldrohne, ein Ladegerät und zwei voll aufgeladene Akkus (A_1 und A_2).
Ein voll aufgeladener Akku ist nach 40 Minuten Flugzeit leer.

Um die Drohne möglichst lange fliegen lassen zu können, geht Anton folgendermaßen vor:
Nachdem A_1 leer ist, setzt er A_2 in die Drohne ein und lädt A_1 so lange bis A_2 leer ist.
Zu diesem Zeitpunkt ist A_1 zur Hälfte geladen und wird in die Drohne eingesetzt und A_2 wird geladen.
Während Anton mit dem halb geladenen A_1 fliegt, wird A_2 aufgeladen, und zwar so lange bis A_1 leer ist.
Diese Prozedur wird so lange wiederholt, bis beide Akkus leer sind.

Wie viele Minuten kann Anton die Drohne fliegen lassen, wenn das Entladen eines Akkus zwei Mal so schnell erfolgt wie das Aufladen des Akkus?

Hinweis: $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

Lösungen zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2019

1. a) 1. Lösung
Im Koordinatensystem mit $A(0|0)$ liegen AM und BD auf den Geraden $y = 2x$ bzw. $y = -x + 3$. Sie schneiden sich in $S\,(1|2)$.

Somit ist $F = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.

6P.

2. Lösung
Die Dreiecke ABS und MDS sind ähnlich.
Ihre Höhen durch S verhalten sich wie $2 : 1$.

Also ist $F = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$.

b) Im Koordinatensystem mit $A(0|0)$ liegen AE und BD auf den Geraden $y = \sqrt{3}x$ bzw. $y = -x + 2$. Sie schneiden sich in $S\left(\frac{2}{\sqrt{3}+1}\middle|\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$.

Also ist $F = \frac{2^2}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - \sqrt{3}\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2\sqrt{3} - 3$ 6P.

---

2. a) Mit $\dfrac{(n+1)! + n!}{(n+1)! - n!} = \dfrac{n!(n+1+1)}{n!(n+1-1)} = \dfrac{n+2}{n}$ folgt

$$\frac{(6!+5!)(5!+4!)(4!+3!)(3!+2!)(2!+1!)}{(6!-5!)(5!-4!)(4!-3!)(3!-2!)(2!-1!)} =$$

$$\frac{(6+1)5! \cdot (5+1)4! \cdot (4+1)3! \cdot (3+1)2! \cdot (2+1)1!}{(6-1)5! \cdot (5-1)4! \cdot (4-1)3! \cdot (3-1)2! \cdot (2-1)1!} = \frac{7}{5} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{1} = 21$$

6P.

b) Mit $f(n) := \sqrt{\frac{n}{3}} + \sqrt{\frac{12}{n}}$ ist auch $f^2(n) = \frac{n}{3} + \frac{12}{n} + 4$ minimal.

1. Lösung:
Aus $\left(f^2(n)\right)' = \frac{1}{3} - \frac{12}{n^2} = 0$ folgt $n = 6$.

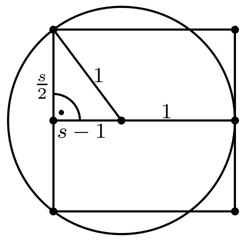
2. Lösung:
$f^2(n) = \left(\sqrt{\frac{n}{3}} - \sqrt{\frac{12}{n}}\right)^2 + 8$ ist minimal für $\sqrt{\frac{n}{3}} = \sqrt{\frac{12}{n}}$, also für $n = 6$. 6P.

3. Lösung
Mit der Ungleichung $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel und der Gleichheit für $a = b$ folgt aus

$$\sqrt{\frac{n}{3}} + \sqrt{\frac{12}{n}} \leq 2\sqrt{\sqrt{\frac{n}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{n}}} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

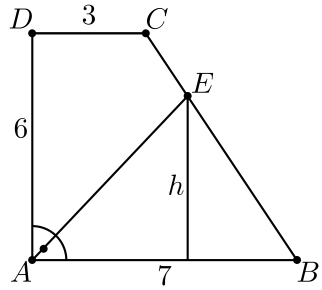
$\sqrt{\frac{n}{3}} = \sqrt{\frac{12}{n}}$, also $n = 6$.

3. a)



Aus $\left(\frac{s}{2}\right)^2 + (s-1)^2 = 1^2$

folgt $s = \frac{8}{5}$. 6P.



b) (i) $BC = \sqrt{6^2 + (7-3)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

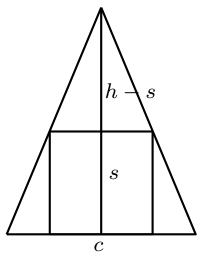
$F = \frac{1}{2}(7+3) \cdot 6 = 30$ 6P.

(ii) Aus $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 30$ folgt $h = \frac{30}{7}$

Aus $\frac{BE}{h} = \frac{BC}{AD} = \frac{2\sqrt{13}}{6}$ folgt $BE = \frac{2\sqrt{13}}{6} \cdot \frac{30}{7} = \frac{10}{7}\sqrt{13}$

---

4. a)



Aus $\dfrac{h-s}{s} = \dfrac{h}{c}$ folgt $s = \dfrac{c \cdot h}{c+h}$. 6P.

b) Mit $A(x|y)$ und $y = \frac{1}{x}$ folgt $s(x) = \dfrac{2x \cdot y}{2x+y} = \dfrac{2}{2x + \frac{1}{x}}$

1. Lösung: (ohne Differenzialrechnung)

$$s(x) = \frac{2}{2x + \frac{1}{x}} = \frac{2}{\left(\sqrt{2x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2}}$$

$s(x)$ ist maximal für $2x = \frac{1}{x}$, also $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. 6P.

2. Lösung:

Aus $s'(x) = \left(\dfrac{2x}{2x^2+1}\right)' = \dfrac{2\left(2x^2+1\right) - 2x \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = 0$ folgt $2x^2 = 1$, also $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

---

5. Die 6. Schicht enthält $11 \cdot 11 = 121$ Würfel.

a) $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2 + 11^2 = 286$ Würfel 4P.

b) Von oben und von unten sind je 11^2 Quadrate zu sehen. Von jeder Seite sind $1+3+5+7+9+11 = 36$ Quadrate zu sehen. 4P.

Also besteht die Oberfläche aus $2 \cdot 11^2 + 4 \cdot 36 = 386$ Quadraten.

c) $AB^2 = 6^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 6^2 \cdot 3$ und somit $AB = 6\sqrt{3}$. 4P.

6. Sei $M\,(0|r)$ der Mittelpunkt des Kreises,
PM steht senkrecht auf der Tangente in P:

$$-2x \cdot \frac{\frac{9}{4} - x^2 - r}{x} = -1$$

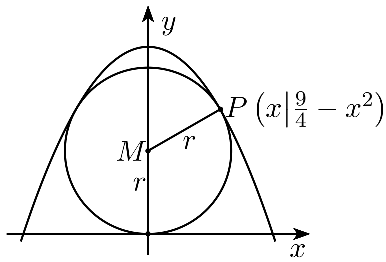
Hieraus folgt $\frac{9}{4} - x^2 - r = \frac{1}{2}$ und $x^2 = \frac{7}{4} - r$.

Eingesetzt in $r = MP$

$$r^2 = x^2 + \left(\tfrac{9}{4} - x^2 - r\right)^2 = x^2 + \tfrac{1}{4} = 2 - r$$

Aus $r^2 = 2 - r$ folgt $r = 1$ und

$$P\left(x\middle|\tfrac{9}{4} - x^2\right) = P\left(\sqrt{\tfrac{7}{4} - r}\middle|\tfrac{1}{2} + r\right) = P\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\middle|\tfrac{3}{2}\right).$$



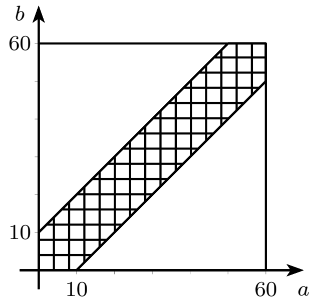
12P.

---

7. Seien a und b die Ankunftszeiten zwischen 12 und 13 Uhr. Im a-b-Koordinatensystem ist $|a-b| \leq 10$ das schraffierte Gebiet.

Also ist die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{60 \cdot 60 - 50 \cdot 50}{60 \cdot 60} = 1 - \tfrac{25}{36} = \tfrac{25}{36} \approx 30,6\ \%.$$



12P.

---

8. Sei t die Gesamtzeit, die bei dem beschriebenen Wechsel erreicht wird.

Dann gilt:

<u>1. Lösung:</u>

$$t = 40 + 40 + \tfrac{1}{2} \cdot 40 + \tfrac{1}{4} \cdot 40 + \ \cdots\ = 80 + 20\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \cdots\right)$$

$$= 80 + 20 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 120 \text{ (Minuten)}.$$

12P.

<u>2. Lösung:</u>

Aus $t = 40 + 40 + \frac{1}{2}(t - 40)$ folgt $t = 120$ (Minuten).