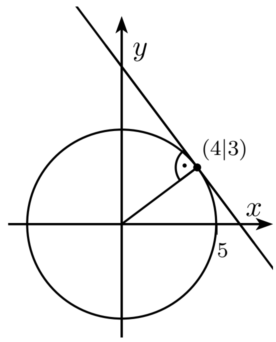
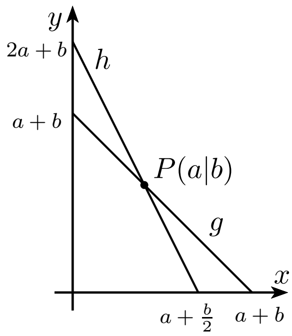
Lösungen zu den Musteraufgaben zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2018 am 21.02.2018



1.) a) Die Steigung der Tangente ist $-\frac{4}{3}$.
Die Gerade $y = -\frac{4}{3}x + c$ geht durch $(4|3)$,
also ist $c = \frac{25}{3}$ und somit die Tangente $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$.



b) Aus $\dfrac{y-b}{x-a} = -1$ und $\dfrac{y-b}{x-a} = -2$ folgt

$g : y = -x + a + b$ und $h : y = -2x + 2a + b$.

Die Achsenabschnitte sind für
$g :\; a + b$ und $a + b$,
$h : a + \frac{b}{2}$ und $2a + b$.
Also $F_1 = \frac{1}{2}\,(2a + b - (a + b))\,a = \frac{a^2}{2}$
und $F_2 = \frac{1}{2}\left(a + b - (a + \frac{b}{2})\right) b = \frac{b^2}{4}$

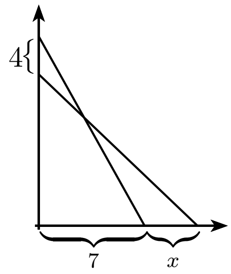
---

2. a) Die gesuchte Basis muss mindestens 6 sein.
Aus $(5b + 5)^2 = 4 \cdot (b^3 + b^2 + b + 1)$ folgt $4b^3 - 21b^2 - 46b - 21 = 0$.
Also muss b ein Teiler von 21 sein, also ist $b = 7$.

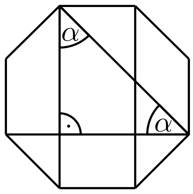
b)
$$\begin{array}{ll} a & 10^n - a \\ b & 10^n - b \\ \hline \end{array}$$

$(b - (10^n - a)) \cdot 10^n + (10^n - a) \cdot (10^n - b)$
$= b \cdot 10^n + a \cdot 10^n - 10^n \cdot 10^n + 10^n \cdot 10^n - 10^n \cdot a - 10^n \cdot b + a \cdot b$
$= a \cdot b$.

3. a) Am Anfang hat die Leiterspitze die Höhe $\sqrt{25^2-7^2}=24$.
Rutscht der Fuß der Leiter um x Meter, so gilt
$25^2-(24-4)^2=(x+7)^2$ also $x=8$.

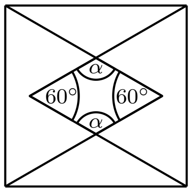


b) (i)

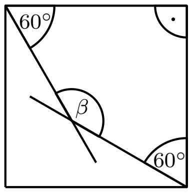


$\alpha=45°$

(ii)



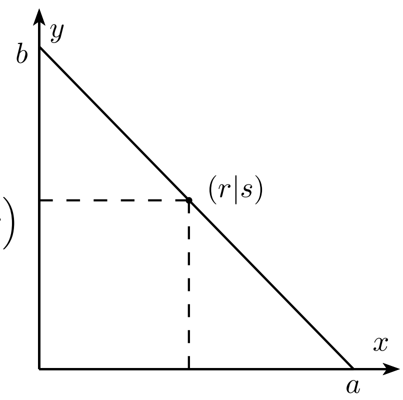
Aus $2\alpha+120°=360°$
folgt $\alpha=120°$



Aus $\beta+120°+90°=360°$
folgt $\beta=150°$

---

4. Die Gerade durch $(r|s)$ habe die Achsenabschnitte a und b.
Aus $\frac{r}{a}+\frac{r}{b}=1$ bzw. $\frac{b-s}{r}=\frac{s}{a-r}$ folgt $b=\frac{as}{a-r}$.
Damit ist die Fläche $F=\frac{1}{2}ab=\frac{s}{2}\frac{a^2}{a-r}$.



1. Lösung:
$F=\frac{s}{2}\frac{a^2}{a-r}=\frac{s}{2}\left(a+r+\frac{r^2}{a-r}\right)=\frac{s}{2}\left(\left(\sqrt{a-r}-\frac{r}{\sqrt{a-r}}\right)^2+4r\right)$
wird maximal für $\sqrt{a-r}=\frac{r}{\sqrt{a-r}}$,
also $a=2r$ und somit $b=2s$.

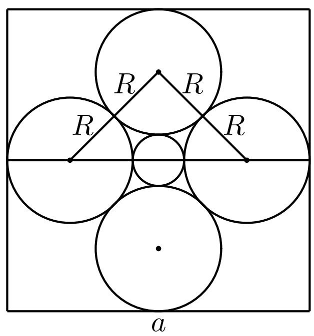
2. Lösung:
Mit der Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ folgt
$F'=\frac{s}{2}\frac{2a(a-r)-a^2}{(a-r)^2}=\frac{a(a-2r)}{(a-r)^2}$.
Aus $F'=0$ folgt $a=2r$ und wegen des Vorzeichenwechsels von Minus nach Plus liegt ein Minimum vor. Somit $b=2s$.

---

5. a) Die Abbildung zeigt einen Schnitt durch die Mittelpunkte von 4 Kugeln.

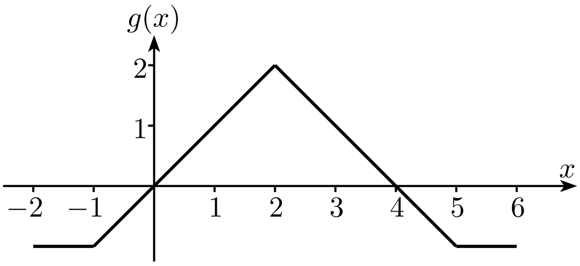
Es gilt $a=2R+2R\sqrt{2}$

also $R=\dfrac{a}{2(1+\sqrt{2})}=\dfrac{a}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.



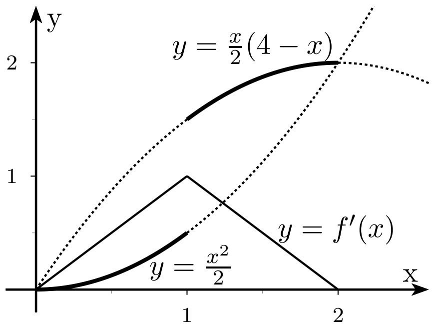
b) Aus $a=2R+2r+2R$ folgt
$r=\frac{a}{2}-2R=a\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$.

6. a)



b) Aus $f'(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x \le 1 \\ 2 - x & ,1 < x \le 2 \end{cases}$ folgt

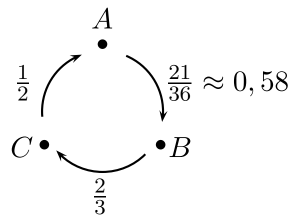
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & ,0 \le x \le 1 \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 & ,1 < x \le 2 \end{cases}$$



---

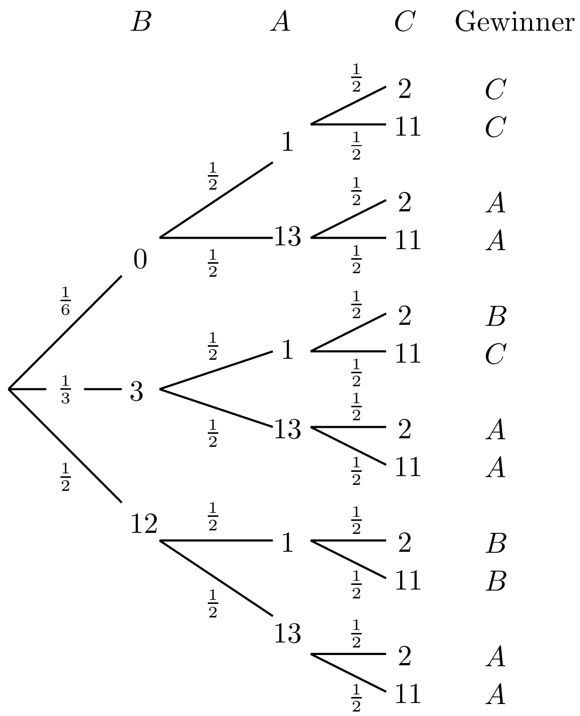
7. a) Beim paarweisen Vergleich der Würfel sind 36 Paare von Augenzahlen möglich.
Beim Werfen von A und B gewinnt A in $3 \cdot 1 + 3 \cdot 6 = 21$ Fällen, denn 3 Einsen schlagen eine Null und 3 Dreizehner schlagen alle 6 Zahlen von B.
Also ist $p(\text{A schlägt B}) = \frac{21}{36}$

Beim Werfen von B und C gewinnt B in $2 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 24$ Fällen, denn 2 Dreien schlagen 3 Zweien, 3 Zwölfen schlagen alle Zahlen von C.
Also ist $p(\text{B schlägt C}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$



Beim Werfen von C und A gewinnt C in $3\dot{3} + 3 \cdot 3 = 18$ Fällen, denn 3 Elfen schlagen 3 Einsen und 3 Zweien schlagen 3 Einsen.
Also ist $p(\text{C schlägt A}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

b) Mit einem Baumdiagramm lassen sich die drei Würfel vergleichen.



A gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit
$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

B gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit
$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

C gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit
$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

Also ist A der stärkste Würfel.

---

8. a) Aus $13\cdot\dfrac{11}{100}=x\cdot\dfrac{13}{100}$ folgt $x=11$.

   b) Wenn es h Hunde und b Besitzer sind, dann gilt $4\cdot h+2\cdot b=16+2(h+b)$. Hieraus folgt $h=8$.

   c) (i) $800\,€\cdot 12=9600\,€$

   (ii) $82\,€\cdot 120=9840\,€$

   Also ist das Angebot (i) günstiger