# MW-E
## Mathematikwettbewerb der Einführungsphase

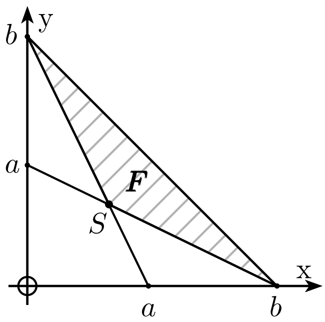
<u>Hinweis:</u> Von jeder Schülerin bzw. jedem Schüler werden fünf Aufgaben gewertet. Werden mehr als fünf Aufgaben bearbeitet, so werden nur die mit den höchsten Punktzahlen berücksichtigt.
Der Lösungsweg muss jeweils klar erkennbar sein.

Zugelassene Hilfsmittel sind Taschenrechner, Formelsammlung und Zeichengeräte.

1. a) Berechnen Sie den Radius $r$ des Kreises mit Mittelpunkt $(0|0)$ und Tangente $x + 2y = 10$.

   b) Gegeben sind zwei Geraden mit den Achsenabschnitten $a$ und $b$ bzw. $b$ und $a$ $\quad (a < b)$.
   Berechnen Sie die schraffierte Fläche $F$ in Abhängigkeit von $a$ und $b$.

   Hinweis: Der Schnittpunkt $S$ der beiden Geraden liegt auf der 1. Winkelhalbierenden.




---

2. a) Eine Zahl $n$ hat im Stellenwertsystem zur Basis $b$ die Darstellung 213.
   Ist die Basis $b + 2$ so ist die Darstellung 112.

   Berechnen Sie $n$ und $b$ im Zehnersystem.

   b) Die folgenden beiden Beispiele zeigen eine Rechenmethode zum Quadrieren zweistelliger Zahlen:

$$
\begin{array}{rr}
 & 5\,7^2 \\ \hline
 & 3\,5 \\
 & 2\,5\,4\,9 \\
 & 3\,5 \\ \hline
+ & 3\,2\,4\,9
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 6\,8^2 \\ \hline
 & 4\,8 \\
 & 3\,6\,6\,4 \\
 & 4\,8 \\ \hline
+ & 4\,6\,2\,4
\end{array}
$$

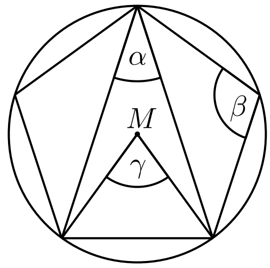
   Überprüfen Sie diese Methode zur Berechnung von $49^2$ und $89^2$.
   Zeigen Sie die Richtigkeit der Rechenmethode allgemein für $ab^2 = (10a + b)^2$.

3. a) Eine 10 m lange Leiter lehnt an einer senkrechten Mauer. Der Mittelpunkt der Leiter ist von der Standfläche doppelt so weit entfernt wie von der Mauer.

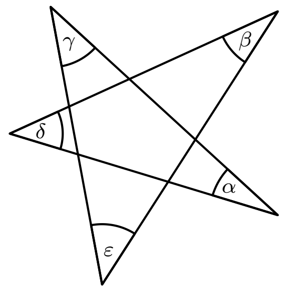
Wie hoch reicht die Leiter an der Mauer?

b) Winkel im (Stern-) Fünfeck

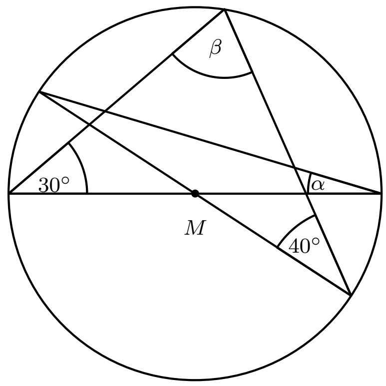
(i) Berechnen Sie in einem regelmäßigen Fünfeck (Umkreismittelpunkt $M$) die Winkel $\alpha, \beta$ und $\gamma$.




(ii) Berechnen Sie in dem abgebildeten Sternfünfeck die Winkelsumme $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon$.




(iii) Berechnen Sie die Winkel $\alpha$ und $\beta$ im abgebildeten Sternfünfeck mit dem Mittelpunkt $M$.

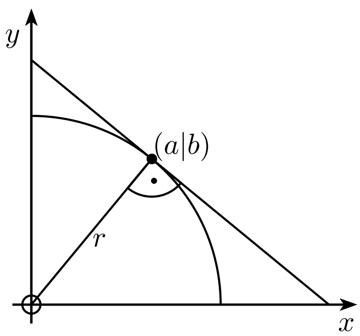



4. Gegeben ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(0|0)$.

Wie muss ein Punkt $(a|b)$ auf dem Kreis gewählt werden, damit die Tangente mit den Achsen ein Dreieck mit möglichst kleiner Fläche bildet?

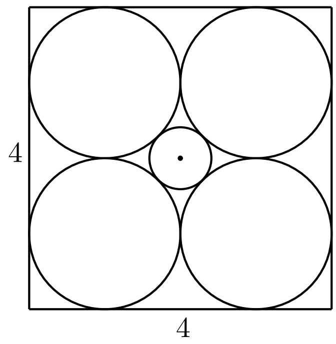
*Hinweis:* Zur Lösung dieser Extremwertaufgabe ohne Differenzialrechnung ist folgende Formel hilfreich:

$$u^2 - uv = \left(u - \tfrac{u}{v}\right)^2 - \tfrac{v^2}{4}.$$



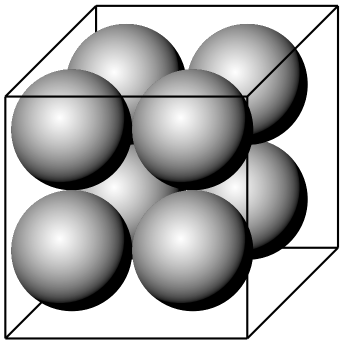
5. a) In einem Quadrat (Seitenlänge 4) sind vier Kreise einbeschrieben.

Berechnen Sie den Radius $r$ des kleinen Kreises in der Mitte der vier großen Kreise.




b) In einem Würfel (Kantenlänge 4) sind acht Kugeln mit Radius 1 eingepasst.

Berechnen Sie den Radius $r$ der kleinen Kugel, die in den Hohlraum zwischen den acht großen Kugeln passt.



6. a) Zeichnen Sie im $x$-$y$-Koordinatensystem die Funktion

$g(x) = max(0, min(1, 2 - |x|))\ ,\ \ -3 \leq x \leq 3$

*Hinweis:* $max(a,b) = \begin{cases} a & , a \geq b \\ b & , a < b \end{cases}$ $\qquad min(a,b) = \begin{cases} a & , a \leq b \\ b & , a > b \end{cases}$

b) Sei $f'(x) = 1 - |x - 1|\ ,\ 0 \leq x \leq 2$, die Ableitung einer Funktion $f$.

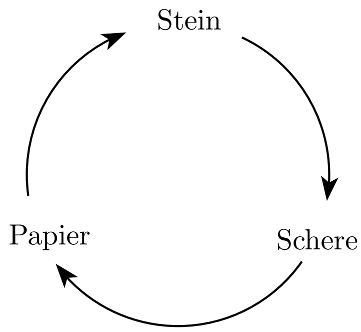
Zeichnen Sie $f'$ und bestimmen Sie $f$ so, dass $f(0) = 0$ und $f(1) = \frac{3}{2}$ gilt.

Zeichnen Sie $f$.

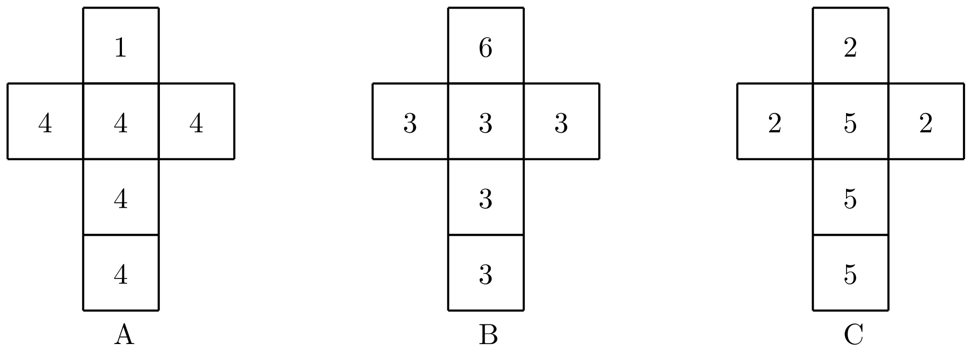
7. Für reelle Zahlen ist die Relation "... ist kleiner als ..." transitiv, d. h. aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

Das Spiel "Stein-Schere-Papier" ist ein Beispiel für eine nichttransitive Relation:

In der Abbildung bedeutet der Pfeil "... schlägt ...".




a) Untersuchen Sie die folgenden Würfel




indem Sie jeweils zwei Würfel auswählen und berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit einer von beiden gewinnt.

b) Welcher Würfel gewinnt, wenn alle drei gleichzeitig geworfen werden?

---

8. a) Wenn Wasser gefriert, vergrößert sich sein Volumen um $\frac{1}{11}$.
Um wie viel verringert sich das Volumen, wenn Eis schmilzt?

b) Eine Bäuerin besitzt zehnmal so viele Hühner wie Gänse.
Die Anzahl ihrer Hühner ist um 7 größer als das siebenfache der Anzahl ihrer Ziegen und Gänse zusammen. Insgesamt hat sie 79 Tiere.

Berechnen Sie, wie viele Tiere sie von jeder Art hat.

c) Familie Schmitt macht Urlaub auf Korsika und will sich dort ein Auto mieten.
Es gibt zwei Angebote:

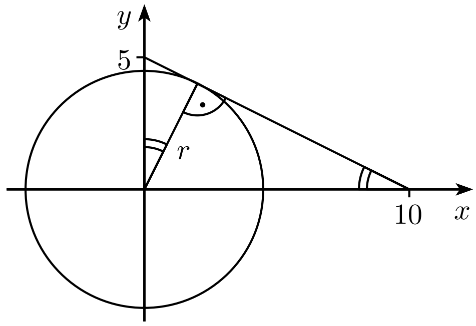
(i) Grundpreis 100 € pro Woche und eine Kilometerpauschale von 1 €.

(ii) Pauschalpreis von 30 € pro Tag und unbegrenzte Freikilometer.

Berechnen Sie, wie viele Kilometer $x$ Schmitts fahren müssten, damit sich Angebot (ii) lohnt.

Lösungen zum
Mathematikwettbewerb der Einführungsphase 2018

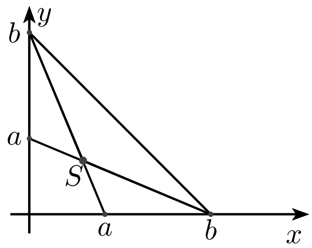
1. a) Die Achsenabschnitte der Tangente sind 10 und 5.



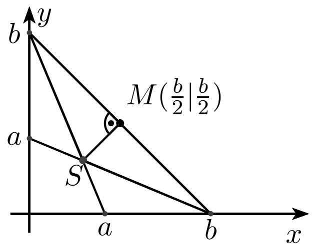

1. Lösung:
Die Fläche zwischen der Tangente und den Achsen ist $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = \frac{1}{2} r \sqrt{10^2 + 5^2}$ und somit $r = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

2. Lösung:
Aufgrund ähnlicher Dreiecke gilt $\frac{r}{5} = \frac{10}{\sqrt{10^2+5^2}}$ und somit $r = 2\sqrt{5}$. 6P.

b) Die Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ und $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ schneiden sich in $S\left(\frac{ab}{a+b} \middle| \frac{ab}{a+b}\right)$.




1. Lösung:
$F = \frac{b^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{b^2}{2} \frac{b-a}{a+b}$. 6P.




2. Lösung:
Für die Höhe $h = SM$ gilt
$h = \left(\frac{b}{2} - \frac{ab}{a+b}\right) \cdot \sqrt{2} = \frac{b}{\sqrt{2}} \frac{b-a}{a+b}$.
Somit gilt $F = \frac{1}{2} b\sqrt{2} \cdot h = \frac{b^2}{2} \frac{b-a}{a+b} = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{2a}{a+b}\right)$

---

2. a) Aus $n = (213)_b = 2b^2 + 1b + 3$ und $n = (112)_{b+2} = 1 \cdot (b+2)^2 + 1 \cdot (b+2) + 2 = b^2 + 5b + 8$ folgt $0 = b^2 - 4b - 5 = (b-5)(b+1)$. 6P.
Also ist die Basis $b = 5$ ($-1$ kann keine Basis sein) und $n = 58$.

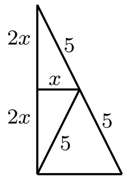
b)
$$\begin{array}{rr} & 4\,9^2 \\ \hline & 3\,6 \\ & 1\,6\,8\,1 \\ & 3\,6 \\ \hline + & 2\,4\,0\,1 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 8\,9^2 \\ \hline & 7\,2 \\ & 6\,4\,8\,1 \\ & 7\,2 \\ \hline + & 7\,9\,2\,1 \end{array}$$

6P.

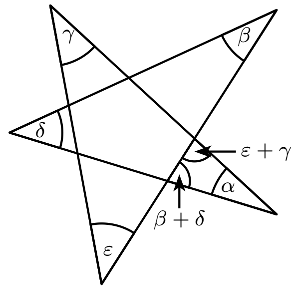
Aus
$$\begin{array}{rr} & a\,b^2 \\ \hline & 10a \cdot b \\ & 100\,a^2 + b^2 \\ & 10a \cdot b \\ \hline + & \end{array}$$

folgt $ab^2 = 10a \cdot b + (100a^2 + b^2) + 10a \cdot b = 100a^2 + 20a \cdot b + b^2 = (10a + b)^2$.

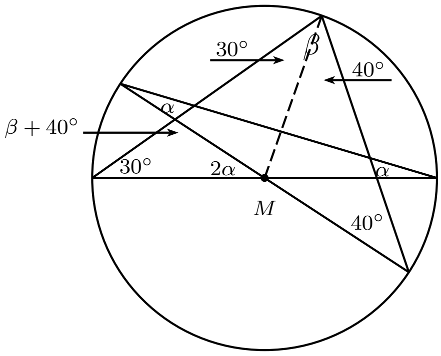
3. a) Aus $x^2 + (2x)^2 = 5^2$ folgt $x = \sqrt{5}$ und somit $4x = 4\sqrt{5}$. 3P.




b) (i) Die Summe aller Innenwinkel im $n$-Eck ist $180°(n-2)$.
Für $n = 5$ folgt $\beta = \frac{180°(5-2)}{5} = 36° \cdot 3 = 108°$.
Für $\gamma$ gilt $\gamma = \frac{360°}{5} = 72°$.
Wegen $\gamma = 2\alpha$ bzw. $3\alpha = \beta$ folgt $\alpha = 36°$. 3P.



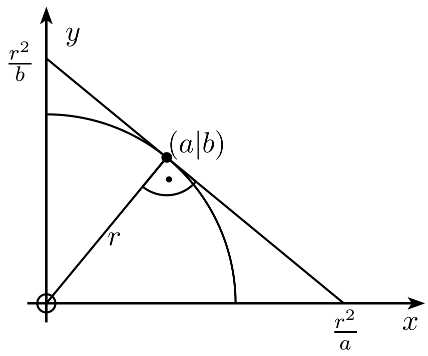

(ii) Der Außenwinkel eines Dreiecks ist die Summe der nicht anliegenden Innenwinkel,
also $\alpha + \delta + \beta + \varepsilon + \gamma = 180°$ 3P.




(iii) Mit $\beta = 30° + 40° = 70°$
und $\beta + 40° + 30° + 2\alpha = 180°$
folgt $2\alpha = 110° - \beta = 40°$,
also $\alpha = 20°$. 3P.

---

4. Die Tangente im Punkt $(a|b)$ hat die Gleichung
$y = -\frac{a}{b}x + \frac{r^2}{b}$.
Die Achsenabschnitte sind $\frac{r^2}{a}$ und $\frac{r^2}{b}$.
Also ist die Fläche
$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{a} \cdot \frac{r^2}{b} = \frac{r^4}{2} \frac{1}{a\sqrt{r^2-a^2}} = \frac{r^4}{2} \frac{1}{\sqrt{a^2r^2-a^4}}$




12P.

1. Lösung:

$$F = \frac{r^4}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{r^4}{4} - \left(a^2 - \frac{r^2}{2}\right)^2}}$$ ist minimal für $a^2 = \frac{r^2}{2}$,

also $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$ und $b = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

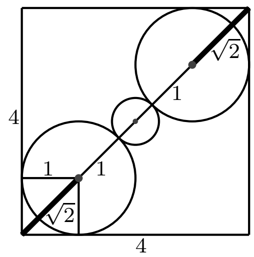
2. Lösung:

Mit der Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ folgt $F' = \frac{r^4}{2} \frac{2ar^2 - 4a^3}{2\sqrt{a^2r^2 - a^4}} = \frac{r^4}{2} \cdot \frac{r^2 - 2a^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}$.

Aus $F' = 0$ folgt $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$ und wegen des Vorzeichenwechsels von Minus nach Plus liegt ein Minimum vor.

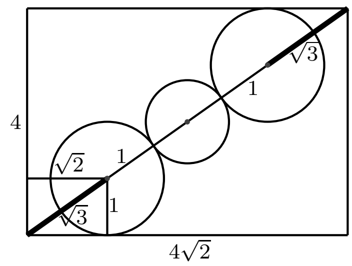
Somit ist $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$ und $b = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

5. a) Die großen Kreise haben den Radius 1.
Dann gilt längs der Diagonalen
$4\sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 + 2r + 1 + \sqrt{2}$,
also $r = \sqrt{2} - 1$.




6P.

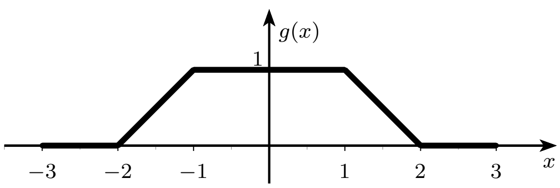
b) Die Kugeln haben den Radius 1 .
Dann gilt längs der Raumdiagonale
$4\sqrt{3} = \sqrt{3} + 1 + 2r + 1 + \sqrt{3}$,
also $r = \sqrt{3} - 1$.




6P.

---

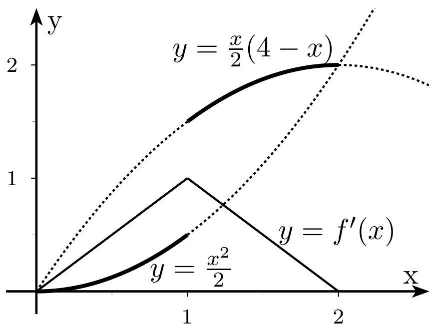
6. a)




6p.

b) Aus $f'(x) = \begin{cases} x & ,0 \le x \le 1 \\ 2 - x & ,1 < x \le 2 \end{cases}$ folgt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & ,0 \le x < 1 \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 & ,1 \le x \le 2 \end{cases}$$



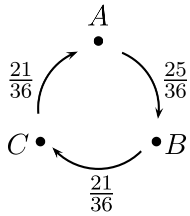

6P.

---

7. a) Beim paarweisen Vergleich der Würfel sind 36 Paare von Augenzahlen möglich.
Beim Werfen von $A$ und $B$ gewinnt $A$ in $5 \cdot 5 = 25$ Fällen, denn alle 5 Vieren schlagen die 5 Dreien von $B$.
Also ist $p(\text{A schlägt B}) = \frac{25}{36} \approx 0,69$.

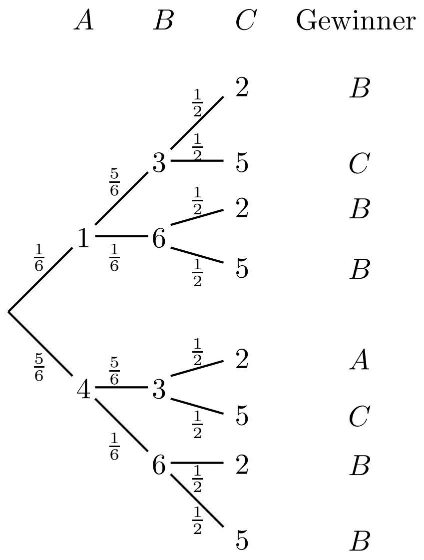
6P.

Beim Werfen von $B$ und $C$ gewinnt $B$ in $5 \cdot 3 + 6 = 21$ Fällen, denn 5 Dreien schlagen 3 Zweien und die Sechs schlägt alle Zahlen von $C$.
Also ist $p(\text{B schlägt C}) = \frac{21}{36} \approx 0,58$.




Beim Werfen von $C$ und $A$ gewinnt $C$ in $3 \cdot 6 + 3 \cdot 1 = 21$ Fällen, denn 3 Fünfen schlagen alle Zahlen und 3 Zweien schlagen die Eins von $A$.
Also ist $p(\text{C schlägt A}) = \frac{21}{36} \approx 0,58$.

b) Mit einem Baumdiagramm lassen sich die drei Würfel vergleichen:




$B$ gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit
$\frac{1}{72} \cdot (5+1+1+5+5) = \frac{17}{72}$

$A$ gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit
$\frac{1}{72} \cdot 25 = \frac{25}{72}$ 6P.

$C$ gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit
$\frac{1}{72} \cdot (5+25) = \frac{30}{72}$

Also ist $C$ der stärkste Würfel.

---

8. a) Sei $E$ das Volumen von Eis und $W$ das Volumen von Wasser, das entsteht, wenn Eis schmilzt. 4P.
Dann gilt $E = W\left(1+\frac{1}{11}\right)$.
Daraus folgt $W = \frac{11}{12}E = E\left(1-\frac{1}{12}\right)$, d. h. das Eis verliert $\frac{1}{12}$ seines Volumens.

b) Seien $h$, $g$ und $z$ die Anzahl der Hühner, Gänse bzw. Ziegen.
Aus $h = 10g$ und $h = 7(z+g)+7$ folgt $79 = z+g+h = \frac{h-7}{7}+h$ 4P.
und somit $h = 70, g = 7$ und $z = 9-g = 2$.

c) Aus $100 + x > 30 \cdot 7$ folgt $x > 110$. 4P.
Also lohnt sich das Angebot $(ii)$ ab 110 km.