Tag der Mathematik 2020

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe G1

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_k(x) = 3kx^3 - 3(k+1)x^2 + 4x, \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für welche Werte von k liegt der lokale Hochpunkt des Schaubildes von f_k über der Geraden $y = 1$?

Hinweis: Man beschränke sich auf die Untersuchung der von k unabhängigen Extremstelle.

Lösung

Es gilt $f_k'(x) = 9kx^2 - 6(k+1)x + 4$

und $f_k''(x) = 18kx - 6(k+1)$.

Wegen $0 = 9kx^2 - 6(k+1)x + 4 = (3x-2)(3kx-2)$

liegen die Extremwerte bei $x = \frac{2}{3}$ und $x = \frac{2}{3k}$.

Aus $f_k\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{9}k + \frac{12}{9} > 1$ folgt $k < \frac{3}{4}$.

Wegen $f_k''\left(\frac{2}{3}\right) = 6k - 6 < 0$ für $k < \frac{3}{4}$ ist bei $x = \frac{2}{3}$ ein lokales Maximum.

Für $k < \frac{3}{4}$ hat f_k ein lokales Maximum oberhalb von $y = 1$.

Aufgabe G2

Für welches x gilt

$$\left(\frac{4}{10}\right)^{x-1} = \left(\frac{625}{100}\right)^{6x-5} ?$$

Lösung

Es gilt

$$\frac{625}{100} = \left(\frac{25}{10}\right)^{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^{2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}.$$

Aus $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^{6x-5}$

folgt $x-1=-2(6x-5)$

und somit $13x = 11$, also $x = \frac{11}{13}$.

Aufgabe G3

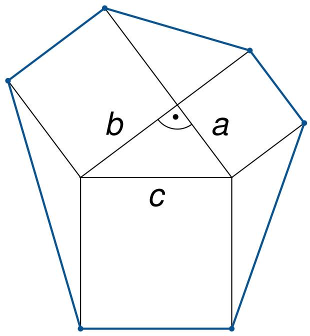
Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a, b und der Hypotenuse c.

Über den Seiten werden die Quadrate gezeichnet.

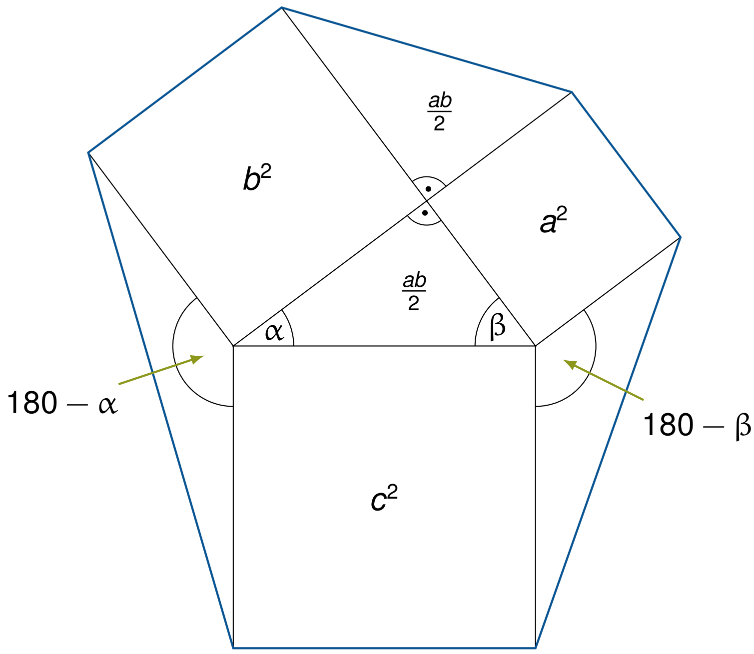
Jeweils zwei der Quadratecken, die nicht Eckpunkte des Dreiecks sind, sind die Ecken eines Sechsecks.

Berechnen Sie die Fläche F dieses Sechsecks.

Hinweis: Es gilt $\sin(180 - \gamma) = \sin\gamma$.



Lösung

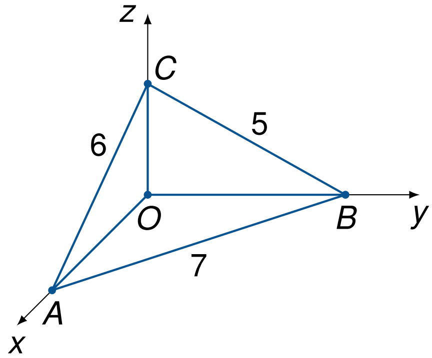


Mit $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha = \frac{a}{c}$ und $\sin(180-\beta) = \sin\beta = \frac{b}{c}$ gilt

$$
\begin{aligned}
F &= a^2 + b^2 + c^2 + 2\cdot\frac{ab}{2} + \frac{1}{2}\cdot bc\cdot\sin(180-\alpha) + \frac{1}{2}\cdot ac\cdot\sin(180-\beta)\\
&= a^2 + b^2 + c^2 + ab + \frac{1}{2}\cdot bc\cdot\frac{a}{c} + \frac{1}{2}\cdot ac\cdot\frac{b}{c}\\
&= 2(a^2 + b^2 + ab) = 2(c^2 + ab).
\end{aligned}
$$

Für die volle Punktzahl ist nur einer dieser beiden Terme erforderlich!

Aufgabe G4



In einem x,y,z-Koordinatensystem haben A, B und C auf den Achsen die in der Abbildung angegebenen Abstände.

Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide $OABC$.

Lösung

Mit $h := OC$ gilt

$OA^2 = 36 - h^2$ und $OB^2 = 25 - h^2$.

Aus $7^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = 36 - h^2 + 25 - h^2$

folgt $h^2 = 6$ und $OA^2 = 36 - h^2 = 30$, $OB^2 = 25 - h^2 = 19$.

Somit ist das Volumen

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{30} \cdot \sqrt{19}}{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{95}.$$

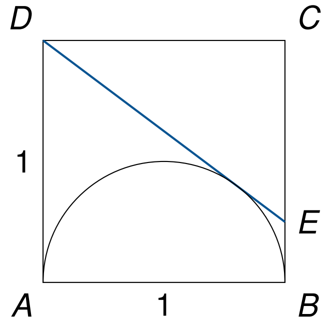
Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-580306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de

Aufgabe E1

Gegeben sind das Quadrat *ABCD* (Seitenlänge 1) und der Halbkreis über *AB*.

Sei *DE* die Tangente von *D* an den Halbkreis.

Berechnen Sie die Länge *DE*.



Lösung

Sei *P* der Berührpunkt der Tangente.

Sei $y := PE$.

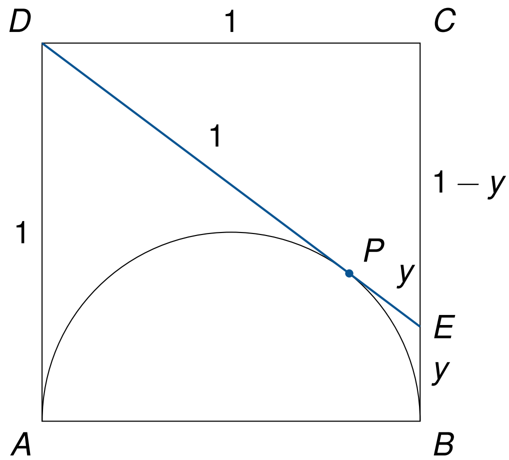
Dann gilt $DP = DA = 1$ und

$y = PE = BE$ sowie $CE = 1 - y$.

Im Dreieck *CDE* gilt

$(1 + y)^2 = 1^2 + (1 - y)^2$.

Also ist $y = \frac{1}{4}$ und $DE = 1 + y = 1{,}25$.

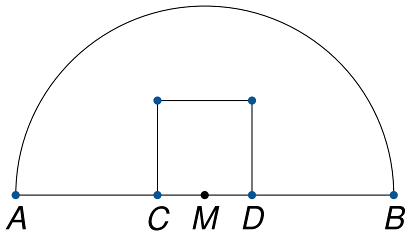


Aufgabe E2

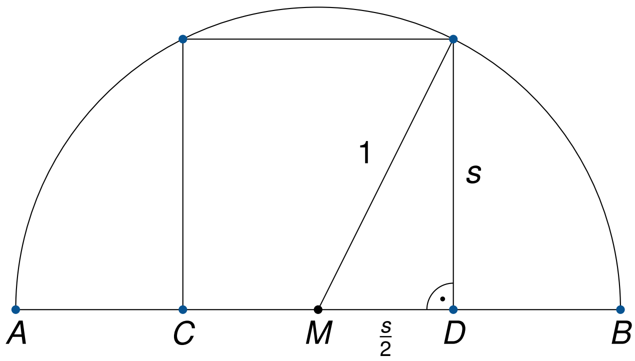
Gegeben ist ein Halbkreis mit Durchmesser $AB = 2$ und dem Mittelpunkt M.

Gesucht ist das flächengrößte Quadrat im Halbkreis, bei dem die Seite CD auf AB liegt.

Berechnen Sie das Verhältnis $CD{:}CB$ so, dass der Nenner rational ist.



Lösung



Sei s die Seite des gesuchten Quadrats.

Dann gilt $s^2+\left(\frac{s}{2}\right)^2 = 1$, also $s = \frac{2}{\sqrt{5}}$ und somit

$$\frac{CD}{CB} = \frac{s}{1+\frac{s}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{(Goldener Schnitt).}$$

Aufgabe E3

Anna und Berta schwimmen auf verschiedenen Bahnen in einem Schwimmbecken.

Sie starten gleichzeitig an den entgegengesetzten Enden des Beckens.

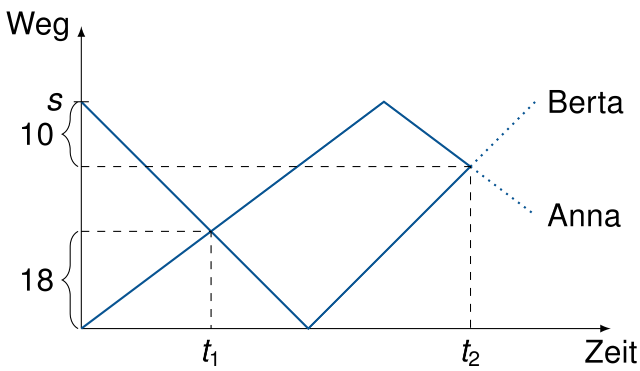
Sie treffen sich nachdem Anna 18m geschwommen ist.

Beide wenden, wenn sie das Ende ihrer Bahnen erreicht haben.

Des nächste Mal treffen sie sich 10m von Bertas Startpunkt entfernt.

Berechnen Sie die Länge s des Beckens.

Lösung



Aus dem Weg-Zeit-Diagramm folgt für das Verhältnis der Geschwindigkeiten

$$\frac{\frac{18}{t_1}}{\frac{s-18}{t_1}} = \frac{\frac{s+10}{t_2}}{\frac{2s-10}{t_2}}$$

und somit $18(2s-10) = (s-18)(s+10)$, also $s = 44$.

Aufgabe E4

a) Aus einer Urne mit 5 schwarzen (s), 3 weißen (w) und 2 roten (r) Kugeln werden 6 Kugeln *ohne* Zurücklegen gezogen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, von jeder Farbe genau zwei Kugeln zu ziehen.

b) Aus einer Urne mit schwarzen (s) und weißen (w) Kugeln werden 5 Kugeln *mit* Zurücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau 3 schwarze Kugeln gezogen werden, ist das 18-fache der Wahrscheinlichkeit, dass genau eine schwarze Kugel gezogen wird.

Wie viel Prozent der Kugeln in der Urne sind schwarz?

Lösung

a) $P(2s,2w,2r) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} = \frac{1}{7}$

b) Sei p die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen. Dann gilt

$$P(3s,2w) = p^3(1-p)^2 \cdot \binom{5}{3}$$
$$P(1s,4w) = p(1-p)^4 \cdot \binom{5}{1}$$

Aus $p^3(1-p)^2 \cdot 10 = 18 \cdot p(1-p)^4 \cdot 5$

folgt $p^2 = 9(1-p)^2$ und somit $p = \frac{3}{4}$.

Also sind 75% der Kugeln schwarz.

Aufgabe H1

Eine Verknüpfung $\oplus$ liefert:

$$\begin{aligned} 6 \oplus 4 &= 210, \\ 2 \oplus 9 &= 711, \\ 8 \oplus 5 &= 313, \text{ und} \\ 2 \oplus 5 &= 37. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $7 \oplus 6$.

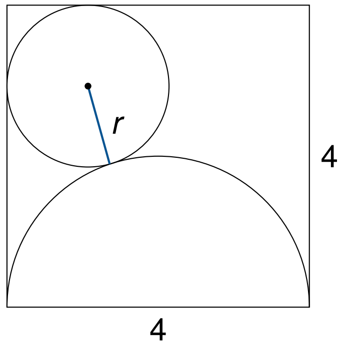
Lösung

Sei $a \oplus b = XY$ mit den Ziffern X und Y.

Dann gilt $X = |a - b|$ und $Y = a + b$.

Also ist $7 \oplus 6 = 113$.

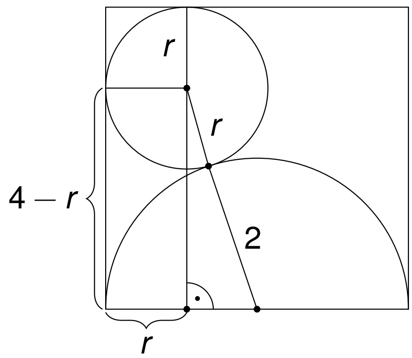
Aufgabe H2



In einem Quadrat (Seitenlänge 4) liegt über einer Seite ein Halbkreis.

Berechnen Sie den Radius r des Kreises, der den Halbkreis und zwei Quadratseiten berührt.

Lösung



Aus $(2+r)^2 = (2-r)^2 + (4-r)^2$

folgt $r^2 - 16r + 16 = 0$ und

$r = 8 \pm 4\sqrt{3}$.

Wegen $r < 2$ ist $r = 4(2-\sqrt{3}) \approx 1{,}07$.

Aufgabe H3

Für welches n gilt

$$\frac{(n!)^2}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{7}{8}\ ?$$

Hinweis: Es ist

$$m! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

Lösung

Aus

$$\frac{7}{8} = \frac{(n!)^2}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{n! \cdot n! \cdot n}{n!(n+1)(n-1)! \cdot n} = \frac{n}{n+1}$$

folgt $n = 7$.

Aufgabe H4

Addiert man das Alter einer Mutter und das Alter ihrer Tochter, erhält man 55.

Vertauscht man im Alter der Mutter die Ziffern, erhält man das Alter der Tochter.

Wie alt sind Mutter und Tochter, wenn die Tochter älter als 5 Jahre ist?

Lösung

Seien die Tochter $xy = 10x + y$

und die Mutter $yx = 10y + x$, $x < y$, Jahre alt.

Dann gilt $xy + yx = 11x + 11y = 55$ und somit $x + y = 5$.

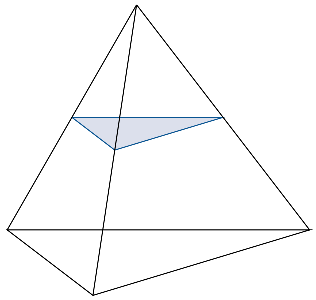
Aus der Tabelle

(x,y)	Mutter	Tochter
$(0,5)$	50	5
$(2,3)$	32	23
$(1,4)$	41	14

folgt, dass nur der letzte Fall ein realistisches Alter sein kann.

Sollte die Lösung $(2,3)$ ebenfalls zusätzlich genannt werden, erfolgt hierfür allerdings kein Punkteabzug.

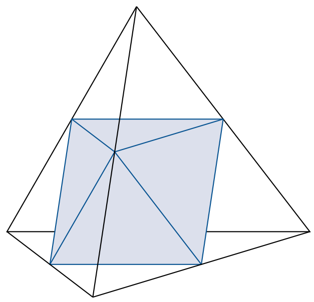
Aufgabe H5



Die vier Ecken eines Tetraeders werden durch vier Ebenen so abgeschnitten, dass diese Ebenen durch die Mittelpunkte von drei benachbarten Kanten gehen. In der Abbildung ist nur eine Ecke abgeschnitten.

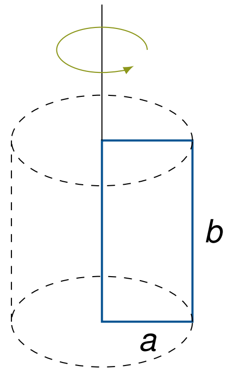
Wie viele Ecken (e), Kanten (k) und Flächen (f) hat der Restkörper?

Lösung



Der Restkörper ist ein Oktaeder mit $e = 6$, $k = 12$ und $f = 8$.

Aufgabe H6



Ein Rechteck mit den Seiten a und b sowie dem Umfang $2a + 2b = 4$ rotiert um eine Seite, sodass ein Zylinder entsteht.

Wie müssen a und b gewählt werden, damit die Fläche F des Zylindermantels möglichst groß wird?

Lösung

Es gilt $F = 2\pi ab = 2\pi a(2 - a)$.

(i) Lösung ohne Differentialrechnung:

$F = 2\pi\left(2a - a^2\right) = 2\pi\left(1 - (a-1)^2\right)$

ist maximal für $a = 1$ und somit $b = 1$.

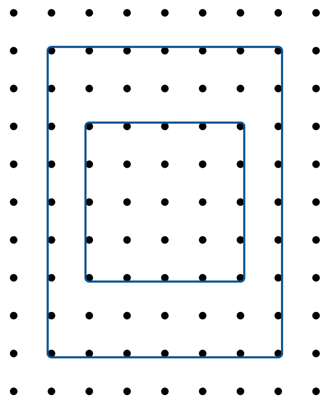
(ii) Lösung mit Differentialrechnung:

Aus $F' = 2\pi(2 - 2a) = 0$ folgt $a = 1$.

Wegen $F'' = -4\pi < 0$ liegt ein Maximum vor.

Also muss das Rechteck ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 sein.

Aufgabe H7



Gegeben sei ein Stiftbrett mit jeweils *n* Stiften in jeder der *m* Zeilen.

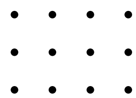
Um die Stifte kann man mit Gummiringen Rechtecke spannen.

Wie viele Rechtecke kann man für jeweils 4 Stifte in 3 Zeilen bilden?

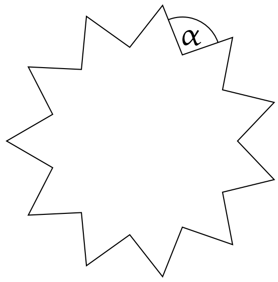
Lösung

Abzählen:

1-er	6
2-er (waag.)	4
2-er (senk.)	3
3-er	2
4-er	2
6-er	1
Summe	18



Aufgabe H8



Über den Seiten eines regelmäßigen n-Ecks werden gleichseitige Dreiecke gezeichnet.

Wie groß ist der in der Abbildung mit α bezeichnete Winkel?

Lösung

$\alpha = 360^\circ - 2 \cdot 60^\circ - 180^\circ \frac{n-2}{n} = 60^\circ + \frac{360^\circ}{n} = 60^\circ \left(1 + \frac{6}{n}\right)$

Zentrum für Mathematik · Werrastraße 26 · 64625 Bensheim · 06251-580306
Internet: www.z-f-m.de · Email: tdm@z-f-m.de