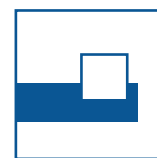
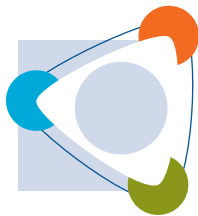




Tag der Mathematik 2018

Gruppenwettbewerb
Einzelwettbewerb
Mathematische Hürden

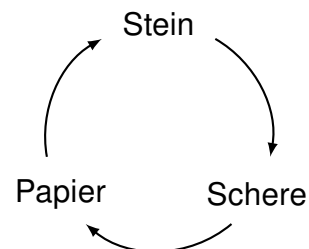
Aufgaben mit Lösungen



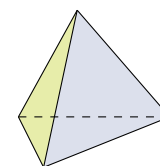
Aufgabe G1

Für reelle Zahlen ist die Relation „... ist kleiner als ...“ transitiv, d.h. aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$.

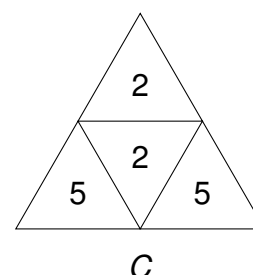
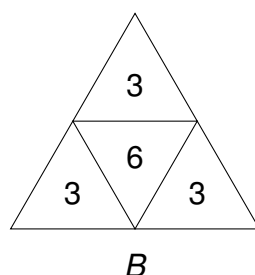
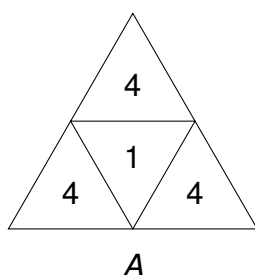
Das Spiel „Stein-Papier-Schere“ ist ein Beispiel für eine nicht transitive Relation. In der Abbildung bedeutet der Pfeil „... schlägt ...“.



Statt einen 6-seitigen Spielwürfel zu werfen, kann man auch einen 4-seitigen Tetraeder werfen.



- a) Untersuchen Sie, ob bei den folgenden drei „Tetraeder-Würfeln“ die Relation „... schlägt ...“ bzw. „... ist stärker als ...“ transitiv ist.

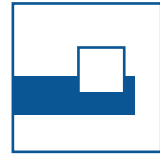
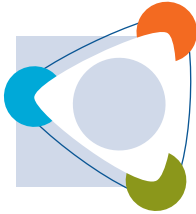


Wählen Sie dazu jeweils zwei Würfel aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p , mit der einer der Würfel gewinnt.

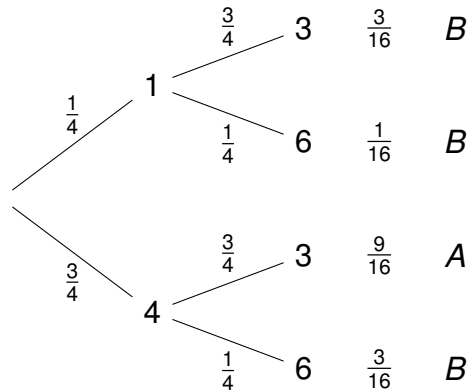
- b) Welcher „Tetraeder-Würfel“ ist der stärkste, wenn alle drei gleichzeitig geworfen werden?

Lösung

- a) An den Baumdiagrammen stehen die Wahrscheinlichkeiten, mit denen die daneben stehenden Würfel gewinnen.

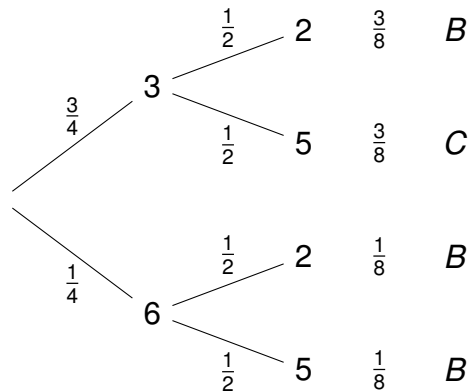


A und B



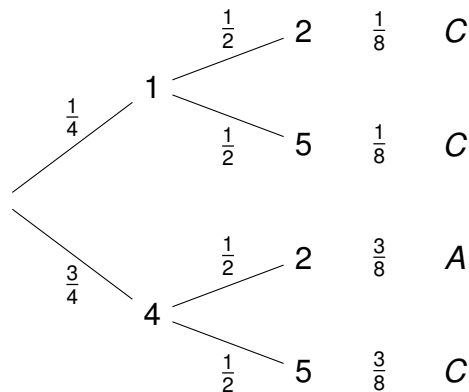
$$P(A \text{ gewinnt}) = \frac{9}{16}$$

B und C

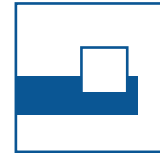
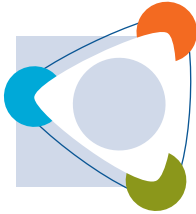


$$P(B \text{ gewinnt}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{10}{16}$$

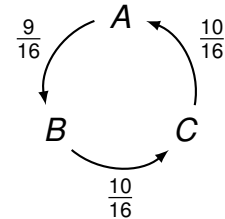
A und C



$$P(C \text{ gewinnt}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{10}{16}$$

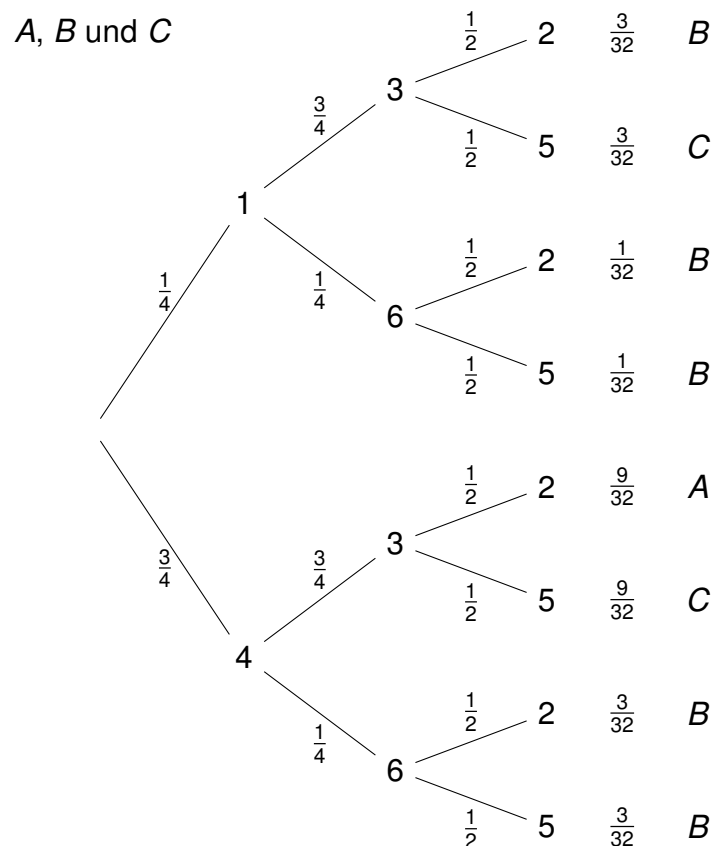


Beim paarweisen Vergleich gibt es keinen „stärksten“ Tetraeder-Würfel.



In der Abbildung stehen an den Pfeilen die Gewinnwahrscheinlichkeiten.

b) Neben den Baumdiagrammen stehen die Gewinnwahrscheinlichkeiten der daneben stehenden Würfel.

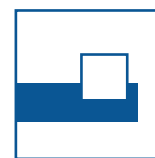


$$P(A \text{ gewinnt}) = \frac{9}{32}$$

$$P(B \text{ gewinnt}) = \frac{3}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} = \frac{11}{32}$$

$$P(C \text{ gewinnt}) = \frac{3}{32} + \frac{9}{32} = \frac{12}{32}$$

Also ist C der „stärkste“ Tetraeder-Würfel.

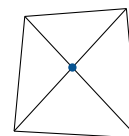


Aufgabe G2

- a) Ein Viereck hat 2 Diagonalen, ein Fünfeck 5 und ein Sechseck 9.

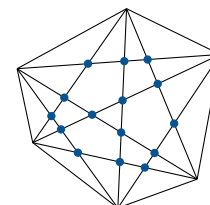
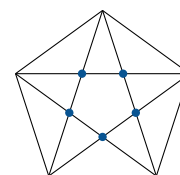
Sei $d(n)$ die Anzahl der Diagonalen in einem n -Eck, also $d(4) = 2$, $d(5) = 5$ und $d(6) = 9$.

Für welches n gilt $d(n) = 104$?



- b) In einem Viereck gibt es nur einen Diagonalschnittpunkt, beim Fünfeck sind es 5 und beim Sechseck sind es maximal 15, wenn nicht 3 Diagonalen durch einen Punkt gehen. In diesem Fall müsste dieser Schnittpunkt 3-fach gezählt werden.

Sei $s(n)$ die maximale Anzahl von Diagonalschnittpunkten in einem konvexen n -Eck, also $s(4) = 1$, $s(5) = 5$ und $s(6) = 15$. Für welches n -Eck gilt $s(n) = 210$?



Lösung

- a) 1. Lösung:

Nimmt man zu einem n -Eck einen weiteren Punkt hinzu, so erhält man weitere $n - 2 + 1$ Diagonalen, denn von den neuen n Verbindungsstrecken sind 2 die zusätzlichen Seiten des $(n + 1)$ -Ecks und eine Seite des n -Ecks wird zur Diagonalen. Also gilt $d(n + 1) = d(n) + (n - 1)$. Aus der Tabelle

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$d(n)$	2	5	9	14	20	27	35	44	54	65	77	90	104

folgt $n = 16$.

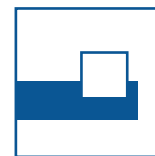
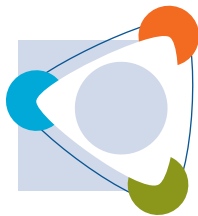
2. Lösung:

Von jedem Punkt eines n -Ecks gehen $n - 3$ Diagonalen aus, also gibt es $(n - 3) \cdot n \cdot \frac{1}{2}$ Diagonalen, da jede Diagonale doppelt gezählt wird. Aus

$$(n - 3) \cdot n \cdot \frac{1}{2} = 104$$

folgt

$$0 = n^2 - 3n - 208 = (n - 16)(n + 13).$$



Also ist $n = 16$.

3. Lösung:

Zu n Punkten gibt es $\binom{n}{2}$ Verbindungsstrecken; davon sind n die Seiten des n -Ecks. Aus $\binom{n}{2} - n = 104$ folgt $\frac{n(n-1)}{2} - n = 104$ und somit

$$0 = n^2 - 3n - 208 = (n - 16)(n + 13).$$

Also ist $d(16) = 104$.

b) 1. Lösung:

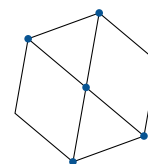
Nimmt man zu einem n -Eck einen weiteren Punkt P dazu, so erhält man $\binom{n}{3}$ weitere Schnittpunkte, denn zu 3 beliebigen Punkten des n -Ecks ergibt sich mit P ein weiterer Diagonalschnittpunkt. Also gilt $s(n+1) = s(n) + \binom{n}{3}$. Aus der Tabelle

n	4	5	6	7	8	9	10
$\binom{n}{3}$	4	10	20	35	56	84	
$s(n)$	1	5	15	35	70	126	210

folgt $s(10) = 210$.

2. Lösung:

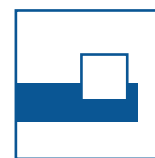
Es gibt $\binom{n}{4}$ Diagonalschnittpunkte, denn 4 beliebige Punkte eines n -Ecks ergeben einen Schnittpunkt und zu jedem Schnittpunkt gehören genau 4 Eckpunkte.



Aus $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ folgt

$$n(n-1)(n-2)(n-3) = 210 \cdot 24 = 3 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7.$$

Also hat ein 10-Eck 210 Diagonalschnittpunkte.



Aufgabe G3

In einem Koordinatensystem sei S die Menge aller Punkte $(x | y)$ für die gilt $|2x - 1| + |2x + 1| + \frac{4|y|}{\sqrt{3}} = 4$.

- Zeigen Sie, dass S symmetrisch zu den Koordinatenachsen ist.
- Bestimmen Sie S im 1. Quadranten, und zwar in den Intervallen
 - $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
 - $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$
 - $x > 1$.
- Welche geometrische Figur bilden *alle* Punkte von S im Koordinatensystem?

Lösung

- Ersetzt man $(x | y)$ durch $(-x | y)$, $(x | -y)$ bzw. $(-x | -y)$, so erhält man dieselbe Gleichung, denn es gilt

$$|2x - 1| + |2x + 1| = |-2x - 1| + |-2x + 1|.$$

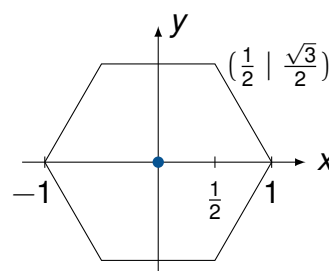
- Sei $y \geq 0$.

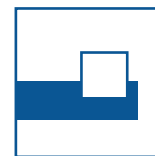
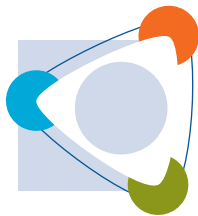
(i) Aus $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ folgt $-(2x - 1) + (2x + 1) + \frac{4y}{\sqrt{3}} = 4$, also $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

(ii) Für $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ gilt $(2x - 1) + (2x + 1) + \frac{4y}{\sqrt{3}} = 4$, also $x + \frac{y}{\sqrt{3}} = 1$.

(iii) Für $x > 1$ gilt $4x + \frac{4y}{\sqrt{3}} = 4$, also $y = \sqrt{3}(1 - x) < 0$, im Widerspruch zu $y \geq 0$, d.h. für $x > 1$ gibt es keine Punkte in S .

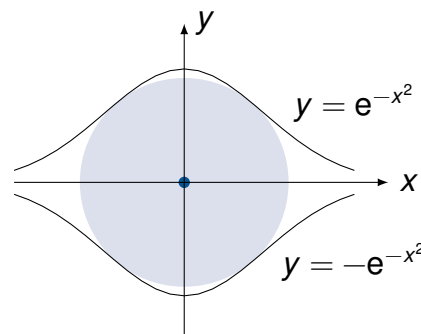
- S ist ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge 1.





Aufgabe G4

Berechnen Sie die Fläche des größten Kreises, der zwischen die beiden Glockenkurven $y = \pm e^{-x^2}$ passt. Hinweis: Die Ableitung von $y = e^{-ax^2}$ ist $y' = -2ax \cdot e^{-ax^2}$.



Lösung

Seien r der Kreisradius und P der Punkt, in dem sich Kreis und Kurve berühren.

1. Lösung:

Der Radius r ist der kleinste Abstand von $(0 | 0)$ zur Kurve. Mit r ist auch r^2 minimal.

Aus $r^2 = x^2 + e^{-2x^2}$ und der Ableitung

$$(r^2)' = 2x - 4xe^{-2x^2} = 0$$

folgt $2e^{-2x^2} = 1$, also $\ln 2 - 2x^2 = 0$ und somit $x^2 = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 = \ln \sqrt{2}$.

Für den maximalen Radius r gilt also $r^2 = \ln \sqrt{2} + \frac{1}{2}$ und $\pi(\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2})$ ist die gesuchte Kreisfläche.

2. Lösung:

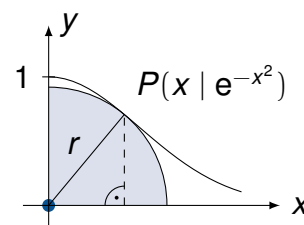
Die Tangente in $P(x | e^{-x^2})$ mit der Steigung $-2xe^{-x^2}$ ist senkrecht zur Strecke OP mit der Steigung $\frac{e^{-x^2}}{x}$. Also gilt

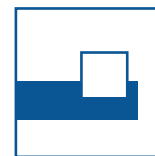
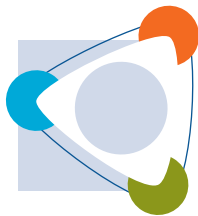
$$\frac{e^{-x^2}}{x} \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = -1.$$

Hieraus folgt $2 \cdot e^{-2x^2} = 1$, also $x^2 = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$. Somit ist der maximale Radius

$$r^2 = x^2 + e^{-2x^2} = \ln \sqrt{2} + \frac{1}{2}$$

und $\pi(\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2})$ die Kreisfläche.

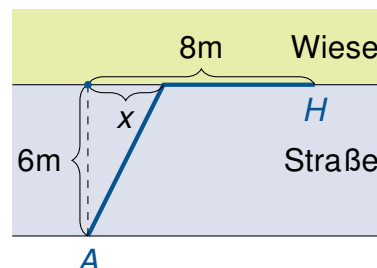




Aufgabe E1

Ein Glasfaserkabel soll von einer Anschlussstelle A zu einem Haus H verlegt werden.

Die Verlegung unter der Straße kostet 130€/m , unter der Wiese 50€/m .



- Wie teuer ist die Verlegung
 - nur unter der Straße, d.h. direkt von A nach H ?
 - 6m unter der Straße und 8m unter der Wiese?
- Wie muss x gewählt werden (siehe Abb.), damit die Kosten $K(x)$ möglichst gering sind?

Lösung

- $\sqrt{6^2 + 8^2} \cdot 130 = 1300$ (€).
 - $6 \cdot 130 + 8 \cdot 50 = 1180$ (€).
- Die Kosten sind $K(x) = \sqrt{x^2 + 6^2} \cdot 130 + (8 - x) \cdot 50$. Aus

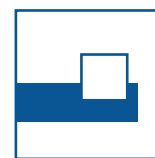
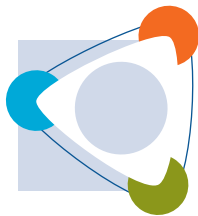
$$K'(x) = \frac{130x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 50 = 0$$

folgt $13x = 5\sqrt{x^2 + 36}$ und somit $x^2 = \frac{5^2 \cdot 6^2}{12^2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$. Wegen

$$K'(x) = 10 \left(\frac{13x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 5 \right) \begin{cases} < 0, \text{ für } x < 2,5 \\ > 0, \text{ für } x > 2,5 \end{cases}$$

liegt bei $x = 2,5$ ein Minimum vor.

Die minimalen Kosten sind $K(2,5) = 1120$ (€).



Aufgabe E2

Untersuchen Sie, ob folgende Terme rational oder irrational sind:

$$\text{a) } r = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \quad \text{b) } s = \sqrt[3]{25+5\sqrt{20}} + \sqrt[3]{25-5\sqrt{20}}$$

Hinweis: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

Lösung

a) Wegen

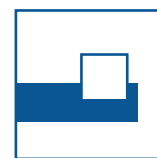
$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{4(2+2\sqrt{2\cdot 6}+6)}{2+\sqrt{3}} \\ &= \frac{4(8+4\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \frac{16(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = 16 \end{aligned}$$

ist $r = 4$ rational.

b) Seien $a := \sqrt[3]{25+5\sqrt{20}}$ und $b := \sqrt[3]{25-5\sqrt{20}}$. Dann ist

$$\begin{aligned} s^3 &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \\ &= (25+5\sqrt{20}) + (25-5\sqrt{20}) + 3\sqrt[3]{(25+5\sqrt{20})(25-5\sqrt{20})} \cdot s \\ &= 50 + 3\sqrt[3]{125} \cdot s = 50 + 15s. \end{aligned}$$

Also ist $0 = s^3 - 15s - 50 = (s-5)(s^2+5s+10)$. Die Gleichung $s^2+5s+10=0$ hat keine reelle Lösung, also ist $s = 5$ und damit rational.



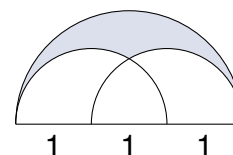
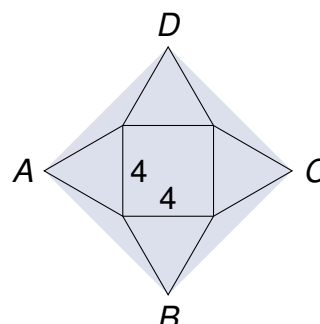
Aufgabe E3

- a) Über den vier Seiten eines Quadrates (Seitenlänge 4) werden nach außen gleichseitige Dreiecke errichtet.

Berechnen Sie die Fläche des Vierecks $ABCD$.

- b) Zwei Halbkreise mit Radius 1 und ein Halbkreis mit Radius 1,5 begrenzen das in der Abbildung gefärbte Gebiet.

Berechnen Sie dessen Fläche.



Lösung

- a) Da das Viereck $ABCD$ gleichlange Seiten und gleichlange Diagonalen hat, ist es ein Quadrat.

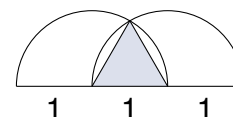
Die Diagonalen AC und BD haben die Länge

$$\frac{4}{2}\sqrt{3} + 4 + \frac{4}{2}\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3}.$$

Also ist die gesuchte Fläche

$$\left(4 + 4\sqrt{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 16 \left(2 + \sqrt{3}\right).$$

- b) Das Gebiet, das zu beiden Halbkreisen gehört, enthält ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1 und Fläche $\frac{1^2}{4}\sqrt{3}$.

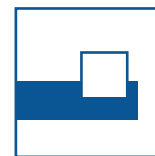
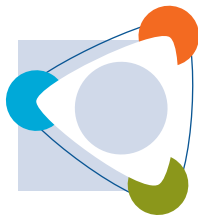


Also ist die Fläche des gemeinsamen Gebiets

$$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 1^2 - \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Somit ist die gefärbte Fläche

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \pi \cdot 1^2 + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{11}{24}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$



Aufgabe E4

Eine gute Fee hatte eine Tochter namens Libussa. Diese war nicht nur sehr klug, sondern auch wunderschön, so dass sie viele Freier hatte, die um ihre Hand anhielten. Unter den vielen Freiern kamen vier in die engere Wahl, doch sie mussten noch einen Test bestehen. Den klügsten Freier wollte sie dann zum Gemahl nehmen. Libussa stellte folgende Aufgabe:

Hier in meinem Korb befinden sich Nüsse.

Der Erste von euch erhält zwei Drittel der Nüsse und eine mehr.

Der Zweite erhält von den verbliebenen Nüssen die Hälfte und eine weitere Nuss.

Der Dritte erhält von den verbliebenen Nüssen ebenfalls die Hälfte und eine weitere Nuss.

Der Letzte erhält von den restlichen Nüssen die Hälfte und drei Nüsse. Dann ist der Korb leer.

Sagt mir, wie viele Nüsse zu Beginn im Korb waren.

Lösung

1. Lösung:

Sei n die gesuchte Anzahl der Nüsse im Korb.

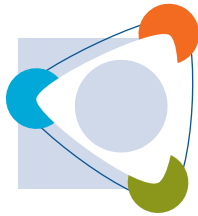
Nr.	Korbentnahme	Verbliebene Korbfüllung
1	$\frac{2}{3}n + 1$	$n - (\frac{2}{3}n + 1) = \frac{n}{3} - 1$
2	$\frac{1}{2}(\frac{n}{3} - 1) + 1 = \frac{n}{6} + \frac{1}{2}$	$\frac{n}{3} - 1 - (\frac{n}{6} + \frac{1}{2}) = \frac{n}{6} - \frac{3}{2}$
3	$\frac{1}{2}(\frac{n}{6} - \frac{3}{2}) + 1 = \frac{n}{12} + \frac{1}{4}$	$\frac{n}{6} - \frac{3}{2} - (\frac{n}{12} + \frac{1}{4}) = \frac{n}{12} - \frac{7}{4}$
4	$\frac{1}{2}(\frac{n}{12} - \frac{7}{4}) + 3 = \frac{n}{24} + \frac{17}{8}$	

Entweder Summe der Korbentnahmen:

$$n = \left(\frac{2}{3}n + 1\right) + \left(\frac{n}{6} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{n}{12} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{n}{24} + \frac{17}{8}\right) = \frac{23}{24}n + \frac{31}{8}.$$

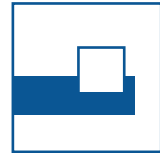
Aus $n = \frac{23}{24}n + \frac{31}{8}$ folgt $n = 93$.

Oder letzte Korbentnahme: Aus $\frac{n}{24} + \frac{17}{8} = 6$ folgt $n = 93$.



Tag der Mathematik 2018

Aufgabe E4 mit Lösung

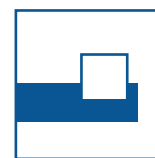
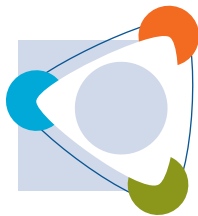


2. Lösung:

Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Nüsse im Korb vor der Ziehung durch den Freier der entsprechenden Nummer:

4	3	2	1
$2 \cdot 3 = 6$	$(6 + 1) \cdot 2 = 14$	$(14 + 1) \cdot 2 = 30$	$(30 + 1) \cdot 3 = 93$

Es waren 93 Nüsse im Korb.



Aufgabe H1

Bei einer Folge a_1, a_2, a_3, \dots ist $a_1 = 7^2 = 49$.

Für das nächste Glied der Folge nimmt man die Quersumme von 49, addiert 1 und quadriert diese Zahl, also $a_2 = (4 + 9 + 1)^2 = 14^2 = 196$.

Somit ist $a_3 = (1 + 9 + 6 + 1)^2 = 17^2 = 289$.

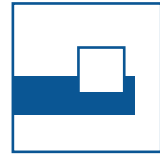
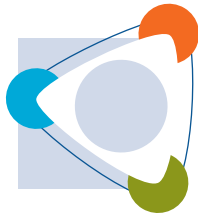
Welche Zahl steht an der 2018. Stelle? Berechnen Sie a_{2018} .

Lösung

n	a_n
1	49
2	196
3	289
4	$(2 + 8 + 9 + 1)^2 = 20^2 = 400$
5	$(4 + 0 + 0 + 1)^2 = 5^2 = 25$
6	$(2 + 5 + 1)^2 = 8^2 = 64$
7	$(6 + 4 + 1)^2 = 11^2 = 121$
8	$(1 + 2 + 1 + 1)^2 = 5^2 = 25$

Die Folge ist ab a_5 periodisch mit der Periode 3: $a_{5+3k} = a_5$; $k = 1, 2, 3, \dots$

Wegen $2018 = 5 + 3 \cdot 671$ ist $a_{2018} = a_5 = 25$.



Aufgabe H2

Für welches x gilt $\sqrt{3} \cdot 3 \cdot 9^3 \cdot 27^4 = (3\sqrt{3})^x$?

Lösung

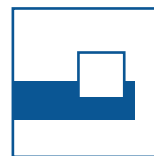
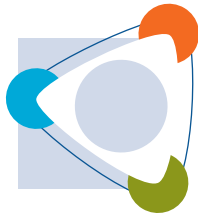
Aus

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^1 \cdot 3^6 \cdot 3^{12} = 3^{\frac{3}{2}x}$$

folgt

$$\frac{3}{2}x = \frac{1}{2} + 1 + 6 + 12 = \frac{39}{2}$$

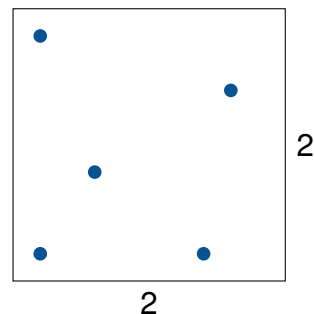
also $x = 13$.



Aufgabe H3

Im Inneren eines Quadrats (Seitenlänge 2) werden zufällig fünf Punkte ausgewählt und ihre Abstände berechnet.

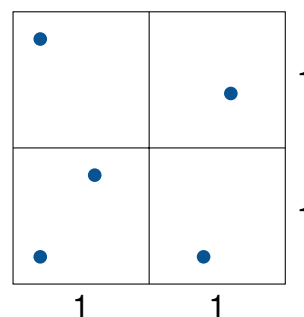
Zeigen Sie, dass mindestens zwei Punkte einen Abstand kleiner $\sqrt{2}$ haben.

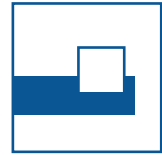
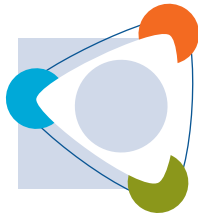


Lösung

Unterteilt man das Quadrat durch seine Mittellinien in vier kleinere Quadrate, so müssen mindestens zwei Punkte in einem dieser kleineren Quadrate liegen.

Ihr Abstand ist kleiner als die Länge der Diagonalen, also kleiner als $\sqrt{2}$.





Aufgabe H4

Ein normales Buch wird zufällig aufgeschlagen.

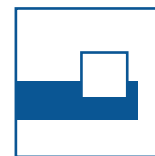
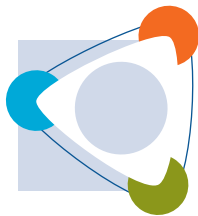
Das Produkt der beiden sichtbaren Seitenzahlen ist 156.

Welche Seitenzahlen sind es?

Lösung

Für die gesuchten Seitenzahlen s und $s + 1$ gilt $s(s + 1) = 156$ und somit $0 = s^2 + s - 156 = (s - 12)(s + 13)$.

$s = 12$ ist die einzige positive Lösung. Also sind $s = 12$ und $s + 1 = 13$ die gesuchten Seitenzahlen.



Aufgabe H5

Für welche x gilt

$$\log(x^3) + 2 \log(\sqrt{5}) + \log\left(\frac{1}{x^2}\right) = \log\left(\frac{5}{x}\right) + \log(5x)?$$

Lösung

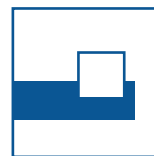
Aus

$$\log(x^3) + 2 \log(\sqrt{5}) + \log\left(\frac{1}{x^2}\right) = \log\left(\frac{5}{x}\right) + \log(5x)$$

folgt

$$3 \log x + \log 5 - 2 \log x = \log 5 - \log x + \log 5 + \log x$$

und somit $\log x = \log 5$, also $x = 5$.



Aufgabe H6

Drei gleich schwere Steine, deren spezifische Gewichte (Dichte) sich wie 3 : 5 : 6 verhalten, haben zusammen ein Volumen von 525cm^3 .

Berechnen Sie die Volumen der einzelnen Steine.

Hinweis: Masse = Volumen \cdot spez. Gewicht

Lösung

Seien V_i , m_i und ρ_i , $i = 1, 2, 3$, die Volumen, Massen und spezifischen Gewichte der drei Steine.

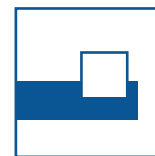
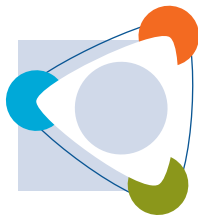
Dann gilt $m_1 = m_2 = m_3$ und $\rho_2 = \frac{5}{3}\rho_1$, $\rho_3 = \frac{6}{3}\rho_1$. Aus

$$\begin{aligned} 525 &= V_1 + V_2 + V_3 = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3} = \frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_1}{\frac{5}{3}\rho_1} + \frac{m_1}{2\rho_1} \\ &= \frac{m_1}{\rho_1} \left(1 + \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \right) = \frac{m_1}{\rho_1} \cdot \frac{21}{10} \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{m_1}{\rho_1} = 525 \cdot \frac{10}{21} = 250$$

und somit $V_1 = 250\text{cm}^3$, $V_2 = 150\text{cm}^3$, $V_3 = 125\text{cm}^3$.



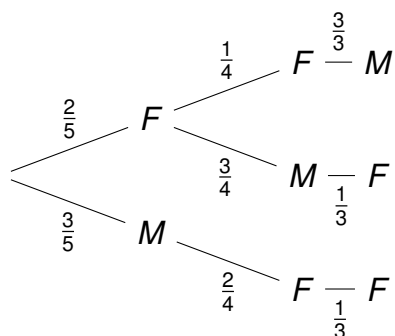
Aufgabe H7

Aus einer Gruppe von drei Männern (M) und zwei Frauen (F) werden drei Personen zufällig für einen 3-er Ausschuss ausgewählt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p , dass beide Frauen in dem Ausschuss sind?

Lösung

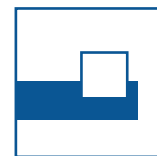
1. Lösung:



$$p = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$

2. Lösung

$$p = \frac{\binom{3}{1} \binom{2}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$$



Aufgabe H8

In der Fußball-Bundesliga mehren sich die Stimmen, dass anstelle des Videobeweises besser ein zweiter, gleichberechtigter Schiedsrichter eingesetzt werden sollte.

Im Folgenden werden drei Annahmen gemacht:

- (i) Beide Schiedsrichter treffen unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% die „richtige“ Entscheidung.
- (ii) Sind beide bei der Beurteilung einer Spielsituation der gleichen Meinung, so gilt diese.
- (iii) Sind die beiden jedoch unterschiedlicher Meinung, werfen sie eine symmetrische Münze und entscheiden dadurch, welche Meinung „richtig“ ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei diesem Verfahren die „richtige“ Entscheidung getroffen wird.

Hinweis: Bei allen Entscheidungen zu Regelverstößen handele es sich um ja/nein-Entscheidungen, wie z.B. Foul/kein Foul oder Abseits/kein Abseits.

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide gleichzeitig die „richtige“ Entscheidung treffen, ist $0,8 \cdot 0,8 = 0,64$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sie unterschiedlicher Meinung sind und daher eine Münze werfen, die die „richtige“ Entscheidung anzeigt, ist in beiden Fällen $0,8(1 - 0,8) \cdot \frac{1}{2} = 0,08$.

Die Wahrscheinlichkeit für eine „richtige“ Entscheidung ist daher

$$0,64 + 0,08 + 0,08 = 0,8.$$

Das beschriebene Verfahren mit einem zweiten Schiedsrichter ist also nicht besser als das bisherige mit nur einem Schiedsrichter.